

# بررسی اثرات نویز بر مسئله بهینه‌سازی سبد سهام

حمیدرضا جلالیان\*

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۳/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۱ نوع مقاله: ترویجی

**چکیده** بهینه‌سازی سبد سهام یک مسئله کاربردی عملی است. وظیفه این مسئله این است که سرمایه را به مجموعه‌ای از دارایی‌ها اختصاص دهد و هدف آن حداکثر کردن سود سرمایه‌گذاری با کم کردن احتمال ضرر و زیان (ریسک) است. این باعث می‌شود که بهینه‌سازی سبد سهام یک مسئله بهینه‌سازی چند هدفه باشد. همچنین این یک مسئله نویزی نیز است اما در اغلب تحقیقات نویز نادیده گرفته می‌شود. در بهینه‌سازی سبد سهام کلاسیک، با استفاده از سود سهام سالیان گذشته نسبت به ایجاد سبد سهام بهینه کارآمد اقدام می‌شود. ناگزیر سود مورد انتظار از سبد سهام دستخوش عدم قطعیت و نویز است. به طور طبیعی ما از سود سهام در آینده هیچ اطلاعی نداریم و فقط بر اساس تخمین و انتظار خود از عملکرد سهام در آینده اقدام به سرمایه‌گذاری می‌کنیم که این خود نویز بالایی را در بر دارد. در این تحقیق از مدل میانگین-واریانس مارکویچ برای بررسی اثرات نویز بر سود حاصله از سبد سهام بهینه استفاده شده است. در این مقاله، نشان خواهیم داد، اگر نویز نادیده گرفته شود، تصمیمات سرمایه‌گذاری می‌تواند به طور قابل توجهی اشتباه باشد. اگر چه نتایج در این مقاله منفی است اما نتایج فواید قابل توجهی برای سرمایه‌گذاران دارد. زمانی که سود سهام دستخوش اغتشاش و نویز است، سرمایه‌گذاران

باید نسبت به انتخاب سبد سهام خود و نحوه سرمایه‌گذاری بسیار محتاط باشند. **واژگان**

**کلیدی:** بهینه‌سازی سبد سهام، بهینه‌سازی نویزی، بهینه‌سازی چندهدفه،

الگوریتم تکاملی.

## مقدمه

نویز اقتصادی و یا به سادگی نویز، یک نظریه قیمت‌گذاری را که از سوی فیشر بلک<sup>۱</sup> طراحی شده است، توصیف می‌کند. بلک، نویز را به عنوان نقطه مقابل اطلاعات<sup>۲</sup> توصیف می‌کند. نظریه او بیان می‌کند که نویز در همه قسمت‌های اقتصاد حضور دارد و ما به ندرت می‌توانیم تفاوت بین نویز و اطلاعات را بیان کنیم (بلک، ۱۹۸۶)<sup>۳</sup>.

این مقاله، به اثر نویز بر روی مسئله بهینه‌سازی سبد سهام که یکی از مسائل کلاسیک در امور مالی (مارکوویچ، ۱۹۵۲)<sup>۴</sup> و اقتصادی است، می‌پردازد. در این مسئله، حداکثر بازده با به حداقل رساندن ریسک از طریق سرمایه‌گذاری بر سهام متنوع میسر می‌شود. مدیریت سبد سهام یک موضوع پژوهشی مهم در دنیای مالی است. یک سبد سهام شامل تعدادی از دارایی‌هاست که درآمد حاصل از آن براساس الگوهای فرایندهای تصادفی مختلف متفاوت است. هدف این است که با به دست آوردن تخصیص بهینه از سرمایه به مجموعه‌ای از دارایی‌ها، مجموع درآمد حاصل از سبد سهام را به حداکثر برسانیم. عوامل زیر عوامل اساسی در مسئله بهینه‌سازی سبد سهام هستند:

ارتباطات دارایی<sup>۵</sup>

اولویت‌های تصمیم‌گیرنده<sup>۶</sup>

تخصیص منابع<sup>۷</sup>

محدودیت کل بودجه<sup>۸</sup>

مسئله بهینه‌سازی سبد سهام یک مسئله پیچیده دنیای واقعی است. مدل‌سازی این مسئله بسیار مهم است. بدون مدل درست، حتی بهترین الگوریتم بهینه‌سازی بی‌فایده است؛ زیرا نتایج حاصل از چنین الگوریتمی‌هایی ممکن است منجر به سرمایه‌گذاری خوبی در واقعیت نشوند.

مارکوویچ در سال ۱۹۹۰ جایزه نوبل اقتصاد را برای مدل‌سازی مسئله بهینه‌سازی سبد سهام دریافت کرد. او یک پاسخ اساسی برای این مسئله بر اساس مدل میانگین و واریانس<sup>۹</sup> ارائه کرد. او این مسئله را به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی با دو معیار (مسئله بهینه‌سازی دو هدفه) تدوین کرد: حداکثر سود یا درآمد (اندازه‌گیری شده با میانگین) با به حداقل رساندن ریسک سبد سهام

1. Fisher Black
2. Information
3. Black
4. Markowitz
5. Asset interrelationship
6. Decision maker's preferences
7. Resource allocation
8. Total budget limitation
9. Mean-Variance

(اندازه‌گیری شده با واریانس بازده سهام) و مبادلات بين سود و ريسک که منجر به یک مجموعه از جواب‌های بهينه به نام مجموعه جواب‌های بهينه پارتو<sup>۱</sup> می‌شود.

با توجه به اینکه هر مدل شامل نويز است، انتظار می‌رود که مدل مسئله بهينه‌سازی سبد سهام نیز نويزی باشد. در حال حاضر، این سوال مطرح می‌شود که آیا اندکی نويز بر سود یا درآمد مشکل‌ساز است؟

این مقاله، به روش زیر سازماندهی شده است:

در بخش ۲ مدل میانگین- واریانس<sup>۲</sup> توصیف می‌شود. مفاهيم عدم قطعیت در امور مالی در بخش ۳ مورد بحث قرار خواهد گرفت. الگوریتم تکاملی برای حل مسئله بهينه‌سازی چند هدفه در بخش ۴ ارائه خواهد شد و بخش ۵ نتایج و بحث‌های تجربی را پوشش می‌دهد. سرانجام، بخش ۶ مقاله را با نتیجه‌گیری به پایان خواهد برد.

### تعريف مسئله

یک مدل میانگین- واریانس، به صورت مسئله بهينه‌سازی دو هدفه می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} \text{Max } R(x) &= \sum_{i=1}^n x_i r_i \\ \text{Min } V(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\ \text{s.t. } \quad x &\geq 0 \in X \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

به طوری که  $r_i$  بازده مورد انتظار برای دارایی (سهام)  $i$  است و  $\sigma_{ij}$  کوواریانس بين دارایی (سهام)  $i$  و  $j$  است. در نهایت،  $x_i$  متغیر تصمیم با مقدار  $[0,1]$  برای  $i=1,2,\dots,n$  است که نشان‌دهنده ترکیب دارایی (سهام)  $i$  در سبد سهام به عنوان نسبتی از کل سرمایه موجود است.

- 
1. Pareto optimal solutions
  2. Mean-Variance

محدودیت غیر منفی  $x \geq 0$  نشان می‌دهد که فروش کوتاه مدت ۱ مجاز نمی‌باشد (مارکوویچ، ۱۹۵۲).<sup>۲</sup>

همان طور که ما نشان دادیم، مسئله بهینه‌سازی سبد سهام یک مسئله بهینه‌سازی چند هدفه با دو هدف ریسک ۳ کمینه شده و بازده ۴ (سود) حداکثر شده است. تعامل بین این دو تابع هدف منجر به یک مجموعه از جواب‌های بهینه نامغلوب به نام مجموع جواب بهینه پارتو ۵ می‌شود.

### تعریف عدم قطعیت (نویز)

اصطلاحات "ریسک" و "نویز" به عنوان عامل عدم قطعیت در مسائل دنیای واقعی گاهی به اشتباه یکسان تلقی می‌شود. این در حالی است که وقوع نویز در سیستم می‌تواند به سطح بالایی از ریسک برای سرمایه‌گذاران منجر شود اما این به این معنی نیست که ریسک و نویز یکسان هستند. به همین دلیل، ما به بررسی تأثیر نویز در مسئله بهینه‌سازی سبد سهام می‌پردازیم. برای وضوح بیشتر، تعاریف اصطلاحات ریسک و نویز در زیر آورده شده است.

ریسک، به احتمال اینکه سود حاصله با سود مورد انتظار چه میزان تفاوت خواهد داشت می‌پردازد. ریسک، احتمال از دست دادن بخشی یا کل سرمایه‌گذاری اصلی را نیز شامل می‌شود. نسخه‌های مختلف ریسک معمولاً با محاسبه انحراف معیار از بازده‌های سالیان گذشته یا بازده میانگین از سرمایه‌گذاری‌های خاص اندازه‌گیری می‌شوند. یک انحراف از معیار بزرگ نشانگر ریسک بالای سرمایه‌گذاری خواهد بود.

نویز، نقطه مقابل مفهوم اطلاعات<sup>۶</sup> است. به دلیل ماهیت پیچیده بازارهای جهانی، تمام داده‌های بازار اطلاعات نیستند. علاوه بر این، بسیاری از نوسانات قیمت که روز به روز می‌بینیم، بیشتر تغییرات تصادفی هستند تا یک روند معنی‌دار. بنابراین، بهینه‌سازی سبد سهام با توجه به ماهیت آن نویزی است؛ همچنین نویز می‌تواند ناشی از تغییرات سیاسی اجتماعی، تغییرات سیاست بازار، بلایای طبیعی یا جنگ و... باشد.

دلایل بسیاری وجود دارد که چرا مردم با توجه به نویز معامله خواهند کرد؟

آنها فکر می‌کنند نویزی که آنها با آن تجارت می‌نمایند اطلاعات است.

آنها فقط دوست دارند که با وجود نویز هم تجارت کنند.

1. Short Sales
2. Markowitz
3. Risk
4. Return
5. Pareto
6. Information

آنها ممکن است احساس کنند که هر تجارتی بهتر از هیچ تجارت است، حتی اگر به خوبی از نویز آگاه باشد.

در اغلب موارد، معامله‌گران نویز پول خود را در معاملات از دست می‌دهند؛ در حالی که معامله‌گران اطلاعات سود می‌کنند؛ به عبارت دیگر، معامله‌گران نویز برای کسانی که با اطلاعات به تجارت می‌پردازند، پرداخت می‌کنند (بلک، ۱۹۸۶)<sup>۱</sup>.

در این مطالعه، یک نویز با توزیع نرمال، میانگین صفر با انحراف از معیارهای متفاوت به تابع سود مسئله بهینه‌سازی سبد سهام بیان شده در معادله (۱) اضافه شده است. انحراف از معیارهای متفاوت را برای بیان سطوح مختلف از نویز مورد استفاده قرار می‌دهیم.

$$\bar{R}(x) = R(x) + N(0, \sigma^2) \quad (2)$$

این معادله نویز را در مسئله بهینه‌سازی سبد سهام مدل می‌نماید. در این تحقیق، مسئله بهینه‌سازی سبد سهام با نویزهای با شدت متفاوت سنجیده خواهد شد؛ به طور مثال، با نویز شدت بالا مانند (۰.۱٪ و ۰.۲۰٪)، نویز متوسط (۰.۵٪) و نویز ضعیف (۰.۱٪ و ۰.۲٪).

### الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی

الگوریتم‌های تکاملی یک کلاس از روش‌های جست و جو تصادفی هستند. آنها به یک ابزار محبوب برای جست و جو، بهینه‌سازی و یادگیری ماشین بدل شده‌اند. با استفاده از تحول شبیه‌سازی شده، این الگوریتم‌ها راه‌حل‌هایی را برای بسیاری از مشکلات پیچیده پیدا می‌کنند. الگوریتم‌های تکاملی با جمعیتی از جواب‌ها کار می‌کنند. بنابراین، آنها قادر به تقریب زدن مجموعه‌ای از جواب‌ها در یک اجرا واحد هستند. این ویژگی برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه (MOP) ایده آل است که مجموعه‌ای از جواب‌های نامغلوب دارند. این مجموعه از جواب‌های نامغلوب جبهه پارتو<sup>۱</sup> نامیده می‌شود (دب، ۲۰۰۱)<sup>۲</sup>.

بسیاری از الگوریتم‌های تکاملی بهینه‌سازی چندهدفه از جمله NSGA-II یا SPEA2 در چند دهه گذشته، توسعه داده شده است. همه آنها برای مسائل پیچیده بهینه‌سازی با مشخصات و محدودیت‌های مختلف اعمال شده‌اند (کویلیو و همکاران، ۲۰۰۷)<sup>۳</sup>.

در این تحقیق، از الگوریتم MOEA/D برای حل مسئله بهینه‌سازی سبد سهام بیان شده در معادله (۱) استفاده می‌کنیم. این الگوریتم بهینه‌سازی یک الگوریتم تکاملی مبتنی بر تجزیه برای

1. Pareto Front
2. Deb
3. Coello & Lamont and Veldhuizen

حل مسائل MOP است (زانگ و لی، ۲۰۰۷)<sup>۱</sup> دستورالعمل مختصری از این الگوریتم در بخش (۴،۱) بیان شده است.

### ۱. الگوریتم MOEA/D

MOEA / D یک الگوریتم مبتنی بر جمعیت است که MOP را به N زیر مسئله تک هدفه تجزیه می‌کند و این N مسئله را به طور همزمان بهینه می‌نماید. تمام تکنیک‌های تجزیه سنتی از ریاضیات مانند مقادیر وزنی، روش چبیشف<sup>۲</sup> و غیره می‌تواند استفاده شود. تنوع در میان زیرمسئله‌ها MOEA/D به طور طبیعی تنوع در بین جمعیت را ایجاد می‌کند. انتخاب صحیحی از بردارهای وزن و روش تجزیه می‌تواند به جواب‌هایی منجر بشود که به طور یکنواخت در طول جبهه پارتو توزیع شده‌اند (لی، ۲۰۰۷)<sup>۳</sup>. در MOEA / D یک همسایگی از زیرمسئله‌ها به صورت T زیرمسئله نزدیک به هم تعریف شده است. نزدیک بودن زیرمجموعه‌ها با نرم اقلیدسی از بردارهای وزن هر زیرمسئله اندازه‌گیری می‌شود. زیرمسئله‌ها اطلاعات خود، مانند نقطه مطلوب را با سایر زیر مسئله‌های همسایه به اشتراک می‌گذارد. MOEA / D با روش تجزیه چبیشف در این تحقیق در نظر گرفته شده است. تمام مراحل در الگوریتم (۱) ذکر شده است، جزئیات بیشتر در مقاله (زانگ و لی، ۲۰۰۷)<sup>۴</sup> موجود است.

---

#### Algorithm 1: MOEA/D

---

Input

MOP (1);

A stopping criterion;

N: the number of subproblems considered in MOEA/D.

A uniform spread of the weight vectors:  $\lambda^1 \dots \lambda^N$ .

T: the number of the weight vectors in the neighborhood of each weight vector.

Output

EP:  $\{F(x^1) \dots F(x^N)\}$ .

Step 1) Initialisation:

Step 1.1) Set  $EP = \emptyset$

Step 1.2) Compute the Euclidean distances between any two weight vectors. For each subproblem  $i = 1 \dots N$ , set the neighborhood  $B(i) = \{i_1 \dots i_T\}$ . Where  $\lambda^{i_1} \dots \lambda^{i_T}$  are the T closest weight vector to  $\lambda^i$ .

Step 1.3) Generate an initial population  $x^1 \dots x^N$  randomly.

---

1. Zhang and Li
2. Tchebycheff
3. Li
4. Zhang and Li

Step 1.4) Evaluate the population.

Step 1.5) Set the reference point  $z = (z_1 \dots z_m)$  by a problem specific method.

Step 2) Update:

For  $i = 1 \dots N$  do

Step 2.1) Reproduction: Randomly select two solutions from  $B(i)$  to generate a new solution  $y$  by using genetic operators.

Step 2.2) Improvement: Apply a problem specific (repair/ improvement heuristics) on  $y$  to produce  $y'$ .

Step 2.3) Update of Z: Update the reference point  $z$  by a problem specific method.

Step 2.4) Update of Neighboring Solutions: For each index  $j \in B(i)$ , set  $x^j = y'$  if  $x^j$  worse than  $y'$  regarding to the subproblem  $j$ .

Step 3) Stopping Criteria:

If stopping criteria are satisfied stop and return EP. Otherwise, go to Step 2.

---

### آزمایش عملی<sup>۱</sup>

هدف از این آزمایش نشان دادن تأثیر نویز در تابع بازده (سود) مسئله بهینه‌سازی سبد سهام است. در آزمایش ما سبد سهام شامل ۳۰ دارایی ( $N = 30$ ) است.

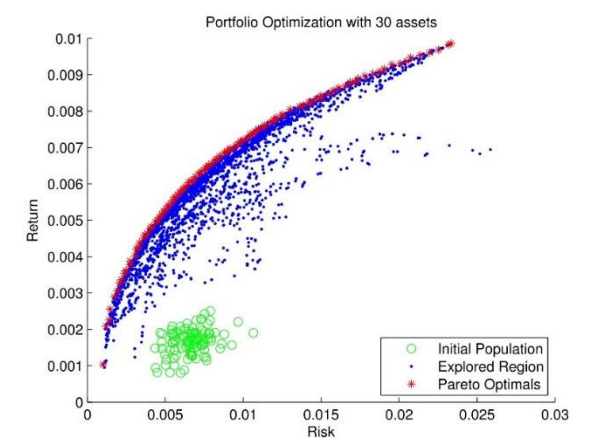
نویزهای با سطح شدت متفاوت به عنوان مثال سطح پایین (۱٪، ۲٪)، متوسط (۵٪) و سطح بالا (۱۰٪ و ۲۰٪) به مدل بیان شده در معادله (۲) اضافه می‌شوند.

الگوریتم MOEA/D برای حل مسئله (۱) استفاده می‌شود. این یک مسئله بهینه‌سازی دو هدفه با هدف به حداقل رساندن ریسک سرمایه‌گذاری و به حداکثر رساندن بازگشت سود است. الگوریتم تنظیم شده است تا پس از ۱۰۰ نسل متوقف شود. جمعیتی از ۱۰۰ نفر نیز برای این آزمایش استفاده می‌شود.

### نتایج

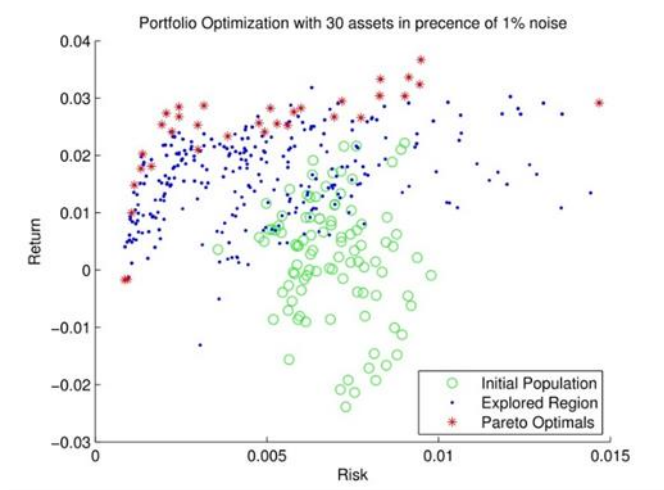
شکل (۱) سبد سهام کارآمد را بدون هیچ گونه نویز افزوده‌شده نشان می‌دهد. برای این مسئله، بازده (سود برگشتی) مورد انتظار ما در محدوده ۰٫۱٪ تا ۱٪ قرار دارد. سبد سهام واقعی کارآمد (جبهه پارتو)<sup>۲</sup> برای ما شناخته شده نیست؛ بنابراین، نتایج حاصل از مسائل نویزی را با نتیجه حاصل از مسئله سبد سهام بدون نویز اضافی مقایسه می‌کنیم.

- 
1. Experiment
  2. True Pareto Front



شکل ۱: مسئله سبد سهام بدون حضور نویز

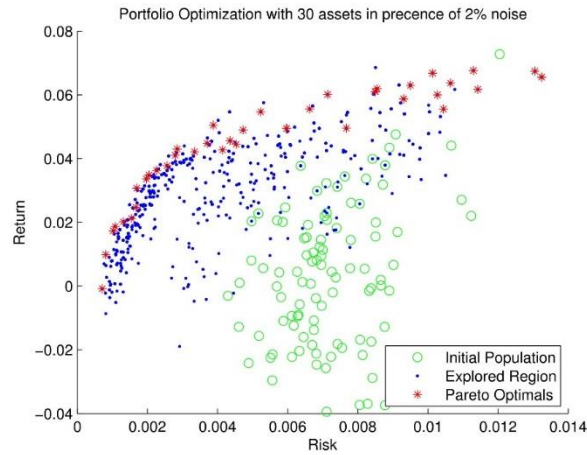
در شکل (۲) تأثیر نویز ۱٪ را بر مسئله بهینه‌سازی سبد سهام ملاحظه می‌کنیم. همان طور که در محور  $y$  نشان داده شده است، محدوده بازده مورد انتظار به صورت نمایی به ۰ تا ۴ درصد گسترش یافته است (در مقایسه با محدوده بین ۰,۰۰۱ تا ۰,۰۱ در مسئله بدون نویز، به شکل (۱) مراجعه کنید).



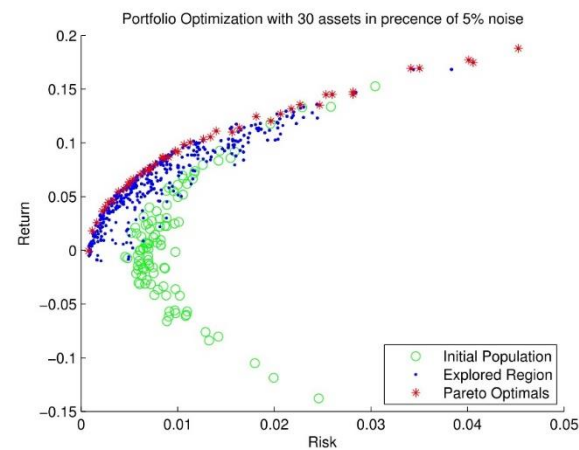
شکل ۲: مسئله سبد سهام در حضور نویز ۱٪



به طور شگفت‌انگیزی، این مقدار نویز (۰.۱٪) نیز جبهه پارتو را به میزان زیادی تغییر می‌دهد. همان طور که از تحقیقات قبلی می‌دانیم (گو و تان، ۲۰۰۷)، MOEA ها به دلیل اینکه از روش‌های تصادفی استفاده می‌نمایند نسبت به نویزهای کم نسبتاً مقاوم هستند.

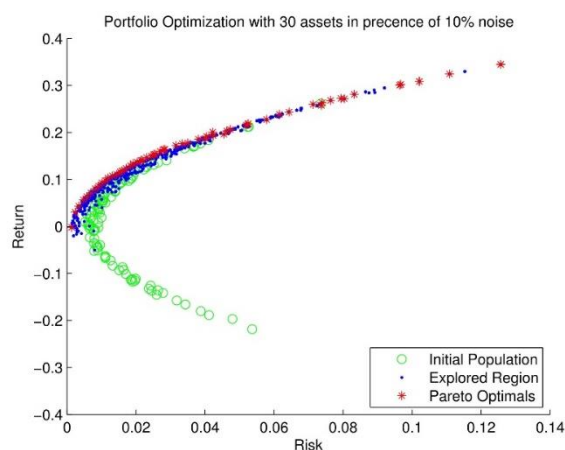


شکل ۳: مسئله سبد سهام در حضور نویز ۰.۲٪

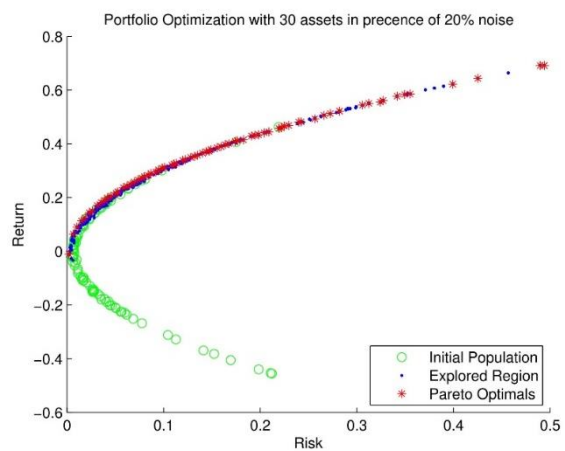


شکل ۴: مسئله سبد سهام در حضور نویز ۰.۵٪

با توجه به شکل (۳)، محدوده بازده مورد انتظار در حضور نویز ۲٪ دو برابر میزان نویز ۱٪ و ۸ برابر بیشتر از نتایج حاصل شده در مسئله بدون نویز است. این روند برای نویز ۲۰٪ نیز ادامه می‌یابد؛ همان طور که در شکل (۶) دیده می‌شود، در آن طیف بازده‌های پیش‌بینی شده به ۸۰٪ می‌رسد. این می‌تواند برای سرمایه‌گذار بسیار گمراه‌کننده باشد، نظر به اینکه بازده، بدون حضور نویز فقط حداکثر ۰٫۰۱٪ است.



شکل ۵: مسئله سبد سهام در حضور نویز ۱۰٪



شکل ۶: مسئله سبد سهام در حضور نویز ۲۰٪

### بحث

مسئله بهینه‌سازی سبد سهام شامل نویز در هر دو تابع هدف، یعنی بازده مورد انتظار ۱ و ماتریس کوواریانس ۲ است.

ماتریس‌های کوواریانس نویزی با مطالعات مختلف مورد بررسی قرار گرفته است (پافکا و کوندور، ۲۰۰۳)<sup>۳</sup> اما هیچ تحقیق قابل توجهی در مورد مدل سازی تابع بازده مورد انتظار نویزی وجود نداشته است.

در این مقاله پژوهشی، اثر نویز بر روی تابع بازده مورد انتظار بررسی شده است. نتایج تجربی نشان می‌دهد که مسئله بهینه‌سازی سبد سهام بسیار حساس به نویز است؛ حتی یک نویز سطح پایین می‌تواند به نتایج آسیب برساند.

### نتیجه‌گیری

بهینه‌سازی نمونه کارها یک مسئله بهینه‌سازی چند هدفه است. طبیعت آن نویزی است؛ زیرا ما نمی‌توانیم آینده را با اطمینان پیش‌بینی کنیم. در این مقاله، ما برای اولین بار مشکل بهینه‌سازی نمونه کارها را با بازده‌های نویزی بررسی کرده‌ایم. ما نشان داده‌ایم که اندکی نویز می‌تواند به طور قابل توجهی در نتیجه مسئله سبد سهام نتیجه نامطلوب بگذارد. ما نشان دادیم که دامنه تغییرات سود مورد انتظار به صورت نمایی رشد می‌کند که می‌تواند به طور چشمگیری تصمیمات سرمایه‌گذاری را دستخوش اشتباه کند. در حالی که این یک نتیجه منفی است اما پیامدهای قابل توجهی دارد. این نشان می‌دهد، هنگامی که تابع سود نویزی است، بهینه‌سازی سبد سهام می‌تواند همراه‌کننده باشد. تحقیقات آینده باید بر روی هر دو امکان یعنی مدل سازی بهتر مسئله و روش‌های بهینه‌سازی مقاوم‌تر تمرکز داشته باشند.

- 
1. Expected Return
  2. Covariance Matrix
  3. Pafka and Kondor

منابع

- Black, F. (1986). Noise. *The Journal of Finance*, 41(3), 529 - 543.
- Coello, C., Lamont, G., & Veldhuizen, D. (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*, Genetic and Evolutionary Computation (Vol. 5). New York: Springer.
- Deb, K. (2001). *Multiobjective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons.
- Goh, C., & Tan, K. (2007). An Investigation on Noisy Environments in Evolutionary Multiobjective Optimization. *IEEE Transaction on Evolutionary Computation*, 11(3), 354-381.
- Li, H. (2007). *Combination of Evolutionary Algorithms with Decomposition Techniques for Multiobjective Optimization*. Colchester, UK: PhD Dissertation, University of Essex.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77 - 91.
- Pafka, S., & Kondor, I. (2003). Noisy covariance matrices and portfolio optimization II. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 319, 487 - 494.
- Zhang, Q., & Li, H. (2007). MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 11(6), 712 - 731.