

## Predicting the Response of an Engineering System by Developing a Data-Driven Surrogate Model Based on Artificial Neural Networks as an Alternative to Finite Element Analysis

Masoud Validoust<sup>1</sup>, Tohid Mirzababaei Mostofi<sup>2</sup>, Mohammad Vahab Mousavi<sup>3</sup>, Hashem Babaei<sup>4</sup>

<sup>1</sup> M.Sc., Department of Mechanical Engineering, University of Eyvanekey, Eyvanekey, Iran

<sup>2</sup> Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Eyvanekey, Eyvanekey, Iran

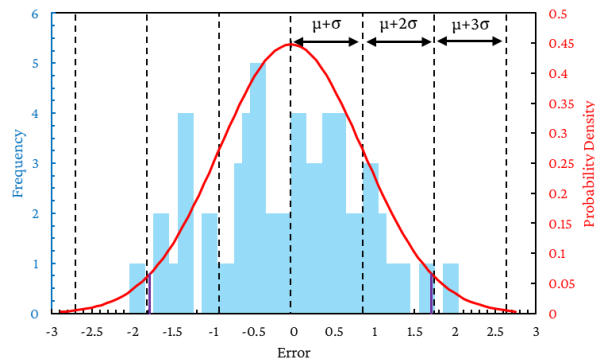
<sup>3</sup> Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran

<sup>4</sup> Professor, Faculty of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

### HIGHLIGHTS

- **Data-Driven GMDH Model:** Replaces FEA with high accuracy and significant computational time reduction for predicting response of mechanical system.
- **Sensitivity and Uncertainty Analysis:** Ranking input parameters (strain rate and impact energy) and confirming model robustness with uncertainty bandwidth of 0.2167, facilitating AI-based design in automotive and aerospace industries.

### GRAPHICAL ABSTRACT



### ARTICLE INFO

*Article history:*

Article Type: Research paper

Received: 20 December 2025

Revised: 29 January 2026

Accepted: 8 February 2026

Available online: 8 February 2026

\*Correspondence:

[m.v.mousavi@ihu.ac.ir](mailto:m.v.mousavi@ihu.ac.ir)

*How to cite this article:*

Validoust, M., Mostofi, T. M., Mousavi, M. V. & Babaei, H. (2026). Predicting the response of an engineering system by developing a data-driven surrogate model based on artificial neural networks as an alternative to finite element analysis. *System Engineering and Productivity*, 6 (3), 303-341.

*Keywords:*

Data-driven surrogate model  
Artificial neural network (ANN)  
FEA alternative  
Dynamic plastic response prediction  
Predictive modeling  
Engineering system

### ABSTRACT

This study introduces a data-driven surrogate model based on the Group Method of Data Handling (GMDH) approach, which utilizes artificial neural networks to replace computationally intensive engineering methods such as Finite Element Analysis (FEA), thereby enhancing simulation system efficiency. The approach was developed by focusing on the nonlinear relationships between dimensionless input parameters—including system characteristics (geometry and material properties), operational conditions (impact energy and strain rate)—and the primary output, namely the permanent deformation-to-thickness ratio of the sheet. An experimental dataset comprising 65 data points was compiled from actual tests employing hydrodynamic processes to apply loading. The GMDH network, with a 12-layer architecture and 120 parameters, was trained after data standardization and splitting into training (67%) and test (33%) sets. Its performance was evaluated using metrics such as RMSE (0.884), MAE (0.711), MAPE (6.673%),  $R^2$  (0.989), and the Willmott index (0.997), which demonstrate high accuracy, absence of overfitting, and a significant reduction in computational time (to seconds versus hours for FEA), thereby improving efficiency in industrial system management. Intrinsic sensitivity analysis, local sensitivity analysis (based on elasticity and partial derivatives), and uncertainty analysis with a confidence band of 0.2167 ranked the importance of input parameters and highlighted the dominant role of operational factors in system optimization. The research innovations include the integration of laboratory data for holistic real-system modeling, provision of input-output mapping, and reduction of simulation costs, making the model suitable for industrial applications in manufacturing process optimization and productivity enhancement in automotive industries, and taking a step toward AI-driven design in systems engineering.

## 1. Introduction

In engineering, predicting the dynamic response of metal sheets under impact loads is a key challenge in industries like automotive, aerospace, and defense. Traditional finite element analysis (FEA), while effective, is computationally expensive for complex dynamic simulations. Data-driven machine learning approaches, particularly artificial neural networks (ANNs), have emerged as efficient surrogate models. Trained on FEA or experimental data, ANNs can quickly predict outputs like stress and deformation without solving complex equations for each scenario, significantly reducing computational time while maintaining high accuracy. Recent studies demonstrate the success of ANN-based surrogate models in predicting the elastoplastic behavior of metallic materials under dynamic conditions (Harfoush et al., 2021; Zhu et al., 2021; Trincherro et al., 2018; Liu et al., 2025; Becker et al., 2022; Amiri et al., 2021). Multi-scale frameworks, such as FEANN, use physics-informed neural networks to replace microscopic FEA, drastically cutting costs while preserving precision for complex materials. In high-speed impact applications, these surrogate models can predict structural responses with high accuracy (often with errors below 5% compared to FEA) and reduce computation time substantially.

Despite their advantages, challenges remain, including the need for high-quality training data, overfitting risks, and limited generalization to unseen conditions. Integrating ANNs with physics-informed neural networks (PINNs), which embed physical laws directly into the learning process, is a promising solution to enhance robustness and physical consistency. The innovation of the current research lies in several key contributions:

- Direct integration of high strain-rate experimental data obtained for both circular and rectangular sheets to build a fully data-driven surrogate model.
- Development of a direct "process input → dynamic plastic response" mapping. This allows design engineers to select optimal sheet thickness, material, and permissible energy before conducting physical tests.
- Significant reduction in analysis cost and time compared to repeatedly running computationally intensive, explicit dynamic FEA simulations, which is particularly burdensome due to the two-phase nature of the problem.
- A step toward "AI-based design" for hydrodynamic forming and related impact manufacturing processes.

## 2. Methodology

The research methodology adopts a data-driven approach using Artificial Neural Networks (ANNs) as surrogate models to replace computationally

expensive traditional simulations for predicting structural behavior, offering high accuracy and instant predictions after training. Specifically, the study utilizes the Group Method of Data Handling (GMDH), a self-organizing neural network algorithm developed by Ivakhnenko. Unlike standard ANNs with predefined architectures, GMDH automatically determines both its optimal structure and parameters through an evolutionary process, akin to natural selection. It builds a layered network from simple polynomial neurons, using a validation set as an "external criterion" to select the fittest models at each layer and to stop growth before overfitting occurs (Ivakhnenko & Ivakhnenko, 1995).

The key outcome is a transparent, explicit polynomial equation (instead of a black-box model) that balances high predictive power with interpretability. The workflow involves:

- Partitioning data into training, validation, and test sets.
- Iteratively generating and selecting neuron layers based on validation performance.
- Stopping automatically when validation error begins to increase, finalizing the optimal model.

The implementation focuses on identifying a system based on its inputs and outputs, resulting in an approximate mathematical function (a polynomial). The core mathematical formulation describes the network's neurons and the least-squares method for determining their coefficients, utilizing Singular Value Decomposition (SVD) to solve the resulting systems of equations. Random sampling with a fixed seed was used for reproducible data splitting into training and testing sets, ensuring unbiased representation and preventing overfitting.

The input and output variables for the network are derived from a dimensional analysis of the governing mechanical equations for a plate under dynamic loading. Starting from the force equilibrium equations for a plate element and incorporating membrane forces and strain rate sensitivity, a non-dimensional governing equation is derived. This analysis reveals that the dynamic plastic response of the plate depends on key non-dimensional groups related to geometry, loading intensity, and strain rate effects. Consequently, the maximum permanent deflection ratio is expressed as a function of these three non-dimensional  $\pi$ -groups for both rectangular and circular plates, providing a physically-informed basis for the model's inputs and output.

Sensitivity analysis for the GMDH model can be performed either intrinsically during model building, as the self-organizing algorithm inherently selects and ranks influential variables, or locally after training by evaluating output changes due to small input perturbations or calculating analytical partial derivatives.

The dataset, drawn from prior experimental studies, includes results for both circular and rectangular plates made of mild steel and aluminum alloy with various thicknesses (1, 2, and 3 mm) (Babaei et al., 2017a; Babaei et al., 2015a). The mechanical properties (static yield stress and density) for each material and plate shape are provided. The impact energy is calculated via potential energy formula.

### 3. Results and Discussion

#### 3.1. Network Architecture

The dataset consisted of 65 data points with three input  $\pi$ -groups ( $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$ ) and one output ( $\pi_0$ ). Data was standardized (mean=0, variance=1) and randomly split (seed=1) into training (67%, 43 data) and testing (33%, 22 data) sets. A GMDH network was implemented, prioritizing accuracy over simplicity by preserving the top 3 polynomials per layer. The resulting model evolved into a 12-layer feedforward network with a total of 120 parameters, incorporating all three inputs. The architecture uses quadratic Ivakhnenko polynomials in each layer to create Partial Descriptions (PDs). The final output is derived from the best-performing PD in the last layer.

#### 3.2. Network Performance Evaluation

The model's performance was evaluated using standard metrics. Key results are summarized below for the full dataset (n=65), the training set (n=43), and the test set (n=22). The model meets the specified requirement of a MAPE below 7%. The high  $R^2$  and R values (all >0.988), along with a Willmott Index (WI) of 0.997, indicate excellent correlation and agreement with the data. The low and consistent CRM values show minimal systematic bias. The negligible performance difference between the training and test sets indicates excellent generalization with no overfitting.

#### 3.3. Sensitivity Analysis

Two sensitivity analysis methods were employed:

1. **Intrinsic Sensitivity:** This analysis, based on the final network's dependency tree, revealed the following relative importance for the input parameters:  $\pi_3$  (0.414) >  $\pi_2$  (0.314) >  $\pi_1$  (0.271). This indicates  $\pi_3$  (related to strain rate effects) is the most influential input.
2. **Post-training Local Sensitivity (Elasticity Analysis):** This method evaluated the model's output responsiveness to small input changes after training.
  - $\pi_1$ : Mean Elasticity = 0.0446 (weak positive effect).
  - $\pi_2$ : Mean Elasticity = 0.4937 (moderate positive effect).
  - $\pi_3$ : Mean Elasticity = -1.0442 (strong negative effect). A 1% increase in  $\pi_3$  leads to a ~1.04% decrease in the output  $\pi_0$ ,

confirming its role as the dominant suppressor in the system.

Both analyses consistently identify  $\pi_3$  as the most critical input variable influencing the model's predictions.

#### 3.4. Error Analysis

An error distribution analysis categorized the absolute relative errors:

- **Training Set:** 74% of predictions had  $\leq 10\%$  error, 95% had  $\leq 20\%$  error.
- **Test Set:** 73% of predictions had  $\leq 10\%$  error, 91% had  $\leq 20\%$  error.
- **Full Dataset:** 74% had  $\leq 10\%$  error, 94% had  $\leq 20\%$  error.

The close alignment between training and test error profiles confirms the model's robustness and lack of overfitting. A small percentage of points (~5-9%) exhibited errors >20%, often in the lower range of the output variable, suggesting areas for potential model refinement.

#### 3.5. Uncertainty Analysis

A comprehensive uncertainty assessment was conducted:

- The mean prediction error was -0.0349, indicating a negligible systematic underestimation. The standard deviation of errors was 0.8911.
- The 95% confidence interval (CI) for the mean error was [-0.2516, 0.1818]. Since this interval includes zero, the slight bias is not statistically significant.
- The Uncertainty Band Width (WUB) was calculated as  $\pm 0.2167$ . This relatively narrow band indicates high prediction stability and reliability.
- A histogram and statistical tests (Shapiro-Wilk  $p=0.798$ , Kolmogorov-Smirnov  $p=0.964$ ) confirmed that the prediction errors follow an approximately normal distribution, supporting the model's statistical robustness.

In summary, the developed GMDH model successfully maps the non-dimensional inputs to the output with high accuracy (MAPE <7%), excellent generalization, and quantifiable reliability. The strain-rate-related parameter ( $\pi_3$ ) is identified as the most influential input.

### 4. Conclusions

The results of this research confirm that the GMDH model, as an advanced data-driven approach, offers superior performance in predicting the dynamic plastic response of metal sheets under impact loading. With an average accuracy exceeding 93% (based on a MAPE of less than 7% and an  $R^2$  close to 1), it serves as an efficient alternative to computationally intensive methods such as FEA. The integration of dimensional analysis for non-

dimensionalizing the governing equations (e.g., dynamic equilibrium equations considering membrane effects and strain rate based on the Cowper-Symonds model) and the utilization of real experimental data from hydrodynamic forming tests not only enhanced the model's generalizability but also enabled fast and accurate prediction under real conditions. Various sensitivity analyses—including intrinsic analysis based on the network dependency tree (with a relative importance of 0.414 for the strain rate parameter), local analysis revealing strong inverse elasticity for the loading parameter, and partial derivatives analysis demonstrating the dominant negative influence of strain rate—highlighted the critical role of parameters related to high strain rate and impact energy, providing guidance for design optimization.

Furthermore, error and uncertainty analysis, with approximately normally distributed residuals, a low uncertainty bandwidth (0.2167), and high cumulative frequency (94% of predictions with less than 20% error), confirmed the model's robustness and reliability on unseen data. Despite computational advantages (up to 99% reduction in time) and high accuracy, challenges such as sensitivity to outliers in low-output regions and the need for more data for more complex materials persist. These can be addressed by integrating advanced techniques like Physics-Informed Neural Networks (PINNs) or data augmentation.

In conclusion, this innovative model, by reducing reliance on heavy simulations and enabling the exploration of a larger design space, takes a significant step toward intelligent, AI-based design in hydrodynamic and impact forming processes. It is recommended that future research extends this model to composite materials, multi-stage loading, or integration with real-time simulations to broaden its industrial applications in automotive, aerospace, and defense industries.

### Funding

This research received no external funding.

### Author contributions

**Masoud Validoust:** Drafting the manuscript, Literature review and theoretical background, Research methodology; **Tohid Mirzababaie Mostofi:** Drafting the manuscript, Conceptual research model, Research methodology, Preliminary review of the report, Data analysis, Statistical analysis draft, Text revision, Supervision; **Mohammad Vahab Mousavi:** Data analysis, Statistical analysis draft, Text revision, Supervision; **Hashem Babaei:** Conceptual research model, Supervision.

### Conflicts of interest

There are no conflicts of interest associated with this research.

### Acknowledgments

We are grateful to all colleagues who provided insights and expertise that greatly assisted this research. We also thank the anonymous reviewers for their valuable suggestions to improve the paper.

### References

- Amiri, M., & Soleimani, S. (2021). ML-based group method of data handling: An improvement on the conventional GMDH. *Complex & Intelligent Systems*, 7(6), 2949-2960. <https://doi.org/10.1007/s40747-021-00480-0>
- Babaei, H., Mirzababaie Mostofi, T., & Alitavoli, M. (2017a). Experimental and theoretical study of large deformation of rectangular plates subjected to water hammer shock loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 231(3), 490-496. <https://doi.org/10.1177/0954408915611055>
- Babaei, H., Mostofi, T. M., & Alitavoli, M. (2015a). Study on the response of circular thin plate under low velocity impact. *Geomechanics & Engineering*, 9(2), 207-218. <https://doi.org/10.12989/gae.2015.9.2.207>
- Becker, M., Klavzar, A., Wolf, T., & Renck, M. (2022). Data-driven prediction of plate velocities and plate deformation of explosive reactive armor. *Defence Technology*, 18(12), 2141-2149. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2022.07.001>
- Harfoush, A., Haapala, K. R., & Tabei, A. (2021). Application of artificial intelligence in incremental sheet metal forming: a review. *Procedia Manufacturing*, 53, 606-617. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2021.06.061>
- Ivakhnenko, A. G., & Ivakhnenko, G. A. (1995). The review of problems solvable by algorithms of the group method of data handling (GMDH). *Pattern recognition and image analysis c/c of raspoznaniye obrazov i analiz izobrazhenii*, 5, 527-535.
- Liu, W., Chen, G., Liu, J., & Zhang, L. (2025). A data-driven model for predicting metal ductile fracture at various stress states. *Engineering Failure Analysis*, 175, 109567. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2025.109567>
- Trinchero, R., Larbi, M., Torun, H. M., Canavero, F. G., & Swaminathan, M. (2018). Machine learning and uncertainty quantification for surrogate models of integrated devices with a large number of parameters. *IEEE Access*, 7, 4056-4066. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2888903>
- Zhu, Q., Liu, Z., & Yan, J. (2021). Machine learning for metal additive manufacturing: predicting temperature and melt pool fluid dynamics using physics-informed neural

networks. *Computational Mechanics*, 67(2), 619-635. <https://doi.org/10.1007/s00466-020-01952-9>

## پیش‌بینی پاسخ یک سیستم مهندسی با توسعه‌ی یک مدل جانشین داده‌محور مبتنی بر شبکه عصبی مصنوعی به‌عنوان جایگزین تحلیل اجزای محدود

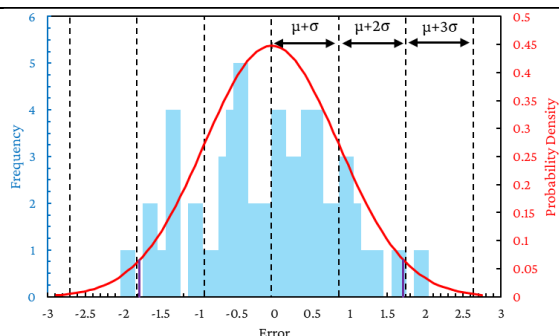
مسعود ولی دوست<sup>۱</sup>، توحید میرزابابای مستوفی<sup>۲</sup>، محمد وهاب موسوی<sup>۳</sup>، هاشم بابایی<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ایوان‌کی، ایوان‌کی، ایران  
<sup>۲</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ایوان‌کی، ایوان‌کی، ایران  
<sup>۳</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه جامع امام حسین(ع)، تهران، ایران  
<sup>۴</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

### برجسته‌ها

- مدل GMDH داده‌محور: جایگزین FEA با دقت بالا و کاهش زمان محاسباتی برای پیش‌بینی پاسخ سیستم مکانیکی.
- تحلیل حساسیت و عدم قطعیت: رتبه‌بندی پارامترها (نرخ کرنش و انرژی ضربه) و استحکام مدل با عرض باند عدم قطعیت ۰/۲۱۶۷، برای طراحی AI در صنایع خودرو و هوافضا.

### چکیده گرافیکی



### مشخصات مقاله

#### تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: پژوهشی  
 دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۲۹  
 بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۰۹  
 پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۱۹  
 ارائه برخط: ۱۴۰۴/۱۱/۱۹

\*نویسنده مسئول:

[m.v.mousavi@ihu.ac.ir](mailto:m.v.mousavi@ihu.ac.ir)

#### کلیدواژه‌ها:

مدل جانشین داده‌محور  
 شبکه عصبی مصنوعی  
 جایگزینی تحلیل اجزای محدود  
 پیش‌بینی پاسخ پلاستیک دینامیکی  
 مدل‌سازی پیش‌بین

### چکیده

این تحقیق، یک مدل جانشین داده‌محور مبتنی بر روش گروهی پردازش داده‌ها (GMDH) را معرفی می‌کند که از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای جایگزینی روش‌های محاسباتی سنگین مهندسی مانند تحلیل اجزای محدود (FEA) بهره می‌برد و بهره‌وری سیستم‌های شبیه‌سازی را افزایش می‌دهد. این رویکرد با تمرکز بر روابط غیرخطی بین پارامترهای ورودی بی‌بعد شامل ویژگی‌های سیستم (هندسه و خواص مواد)، شرایط عملیاتی (انرژی ضربه و نرخ کرنش)، و خروجی اصلی یعنی نسبت تغییرشکل دائمی به ضخامت ورق توسعه یافته است. مجموعه داده‌های تجربی شامل ۶۵ نقطه از آزمایش‌های واقعی تهیه شد که از فرآیندهای هیدروپنماتیکی برای اعمال بارگذاری استفاده می‌کند. شبکه GMDH با معماری ۱۲ لایه و ۱۲۰ پارامتر، پس از استانداردسازی داده‌ها و تقسیم به مجموعه‌های آموزش (۶۷٪) و آزمون (۳۳٪)، آموزش دید و عملکرد آن با معیارهایی مانند RMSE (۰/۰۸۸۴)، MAE (۰/۷۱۱)، MAPE (۶/۶۷۳٪)، R2 (۰/۹۸۹)، و شاخص ویلموت (۰/۹۹۷) ارزیابی گردید که دقت بالا، عدم بیش‌برازش، و کاهش چشمگیر زمان محاسباتی (تا ثانیه‌ها در مقابل ساعت‌ها برای FEA) را نشان می‌دهد که این امر بهره‌وری در مدیریت سیستم‌های صنعتی را ارتقا می‌بخشد. تحلیل حساسیت ذاتی، محلی (بر اساس الاستیسیته و مشتقات جزئی)، و تحلیل عدم قطعیت با عرض باند ۰/۲۱۶۷، اهمیت پارامترهای ورودی را رتبه‌بندی کرد و نقش غالب عوامل عملیاتی در بهینه‌سازی سیستم را برجسته نمود. نوآوری‌های تحقیق شامل ادغام داده‌های آزمایشگاهی برای مدل‌سازی یکپارچه سیستم‌های واقعی، ارائه نگاشت ورودی-خروجی، و کاهش هزینه‌های شبیه‌سازی است که این مدل را برای کاربردهای صنعتی در بهینه‌سازی فرآیندهای تولید و افزایش بهره‌وری در صنایع خودروسازی مناسب می‌سازد و گامی به سوی طراحی مبتنی بر هوش مصنوعی در مهندسی سیستم‌ها برمی‌دارد.

## ۱- مقدمه

به طور مشخص در مسائل مکانیک جامدات و فرآیندهای شکل دهی/تغییر شکل فلزات و نیز سامانه های ضربه/جذب انرژی (Babaei et al., 2015b)، مدل های داده محور و شبکه های عصبی به عنوان جانشین FEA یا برای کاهش تعداد اجرای شبیه سازی ها به کار گرفته شده اند؛ از جمله کاربردهای جدید در فرآیندهای شکل دهی و هیدروفرمینگ، و نیز حوزه های مرتبط با پاسخ دینامیکی و قابلیت ضربه پذیری که نیازمند ارزیابی سریع در سناریوهای متعدد هستند. در حوزه فرآیندهای ساخت و شکل دهی، مطالعات جدید نشان داده اند که می توان با تلفیق FEM و ML به شبیه سازی های نزدیک به زمان واقعی رسید. برای نمونه، چنگ و همکاران (Cheng et al., 2024) یک چارچوب جانشین برای هیدروفرمینگ لوله ارائه کردند که در آن بخشی از چرخه محاسباتی FEM با یک مدل یادگیری ماشین جایگزین می شود؛ به طور خاص، میدان جابه جایی که معمولاً حل آن در FEM پرهزینه است، با ML تخمین زده شده و در نهایت امکان شبیه سازی سریع تر فراهم می شود. این نوع کارها نشان می دهد جانشین ها می توانند نقش «پل» بین دقت شبیه سازی های پرجزئیات و نیاز صنعتی به پیش بینی سریع را ایفا کنند. در مطالعه ای بر روی ورق های فلزی دو لایه تحت بار ضربه ای محلی، پاسخ پلاستیک دینامیکی با استفاده از مدل های تحلیلی و عددی بررسی شد که نشان دهنده مراحل تغییر شکل مانند خمش اولیه و سپس کشش غشایی است، اما این مدل ها همچنان وابسته به محاسبات سنگین بودند (Rezasefat et al., 2019).

در زمینه قابلیت ضربه پذیری و سازه های جاذب انرژی نیز، ادبیات جدید نشان می دهد که یادگیری ماشین نه تنها برای پیش بینی شاخص های پاسخ ضربه/جذب انرژی، بلکه برای بهینه سازی چندهدفه طراحی سازه ها به کار گرفته می شود. از یک سو، مطالعات موردی متعددی نشان می دهند مدل های ML می توانند روند تحلیل و طراحی را نسبت به اجرای تکراری شبیه سازی های دینامیکی تسریع کنند (Liang et al., 2024). از سوی دیگر، مرورهای جدید (تا ۲۰۲۵) بر این نکته تأکید دارند که با وجود ظرفیت بالای ML برای کاهش هزینه محاسباتی و تسریع بهینه سازی، چالش هایی مانند وابستگی به داده، مسئله تعمیم پذیری و ضرورت اعتبارسنجی قوی تحت

در حوزه مهندسی، پیش بینی پاسخ دینامیکی ورق های فلزی تحت بارهای ضربه ای یکی از چالش های کلیدی است که در کاربردهای صنعتی مانند خودروسازی، هوافضا و سازه های دفاعی ظاهر می شود. این پاسخ ها اغلب شامل نرخ های کرنش بالا، تغییر شکل های بزرگ پلاستیک، و اثرات اینرسی می شوند که می توانند منجر به شکست محلی یا تغییر شکل دائمی شوند (Belytschko et al., 2014). روش سنتی برای مدل سازی چنین رفتارهایی، تحلیل اجزای محدود<sup>۱</sup> (FEA) است که بر اساس حل معادلات حاکم بر مکانیک جامدات، مانند معادلات تعادل و روابط سازگاری، عمل می کند. با این حال، FEA در شبیه سازی های دینامیکی پیچیده، به ویژه تحت بارهای ضربه ای، با محدودیت های محاسباتی مواجه است؛ برای مثال، نیاز به مش بندی دقیق و حل تکراری معادلات غیرخطی می تواند زمان محاسباتی را به ساعت ها یا روزها افزایش دهد که این امر در فرآیندهای بهینه سازی یا شبیه سازی های واقعی زمان نامناسب است (Zamani et al., 2015; Bessa et al., 2017; Rokhy & Mostofi, 2023; Haghgoo et al., 2022; Mousavi & Khoramishad, 2019).

برای غلبه بر این محدودیت ها، رویکردهای داده محور مبتنی بر یادگیری ماشین، به ویژه شبکه های عصبی مصنوعی<sup>۲</sup>، به عنوان مدل های جانشین<sup>۳</sup> پیشنهاد شده اند. این مدل ها با استفاده از داده های تولید شده از شبیه سازی های FEA یا آزمایش های واقعی آموزش می دیدند و قادر به پیش بینی سریع پاسخ های خروجی مانند تنش، کرنش و تغییر شکل هستند، بدون نیاز به حل مجدد معادلات پیچیده در هر مرحله (Li et al., 2023). در زمینه پاسخ پلاستیک دینامیکی، ANN ها می توانند روابط غیرخطی بین متغیرهای ورودی (مانند سرعت ضربه، ضخامت ورق، خواص ماده مانند مدول یانگ و تنش تسلیم) و خروجی ها را یاد بگیرند، و اغلب با ادغام اصول فیزیکی<sup>۴</sup> برای بهبود تعمیم پذیری و کاهش نیاز به داده های عظیم تقویت می شوند (Stoffel et al., 2018).

<sup>1</sup> Finite element analysis (FEA)

<sup>2</sup> Artificial Neural Network (ANN)

<sup>3</sup> Surrogate models

<sup>4</sup> Physics-constrained

مهندسی با ابعاد بالا تأکید می‌کند و نقش روش‌هایی مانند کاهش‌بعد، جانشین‌های آماری/پلی‌نومی و استراتژی‌های کارآمد نمونه‌برداری را در کنترل هزینه محاسباتی و حفظ دقت برجسته می‌سازد. این ادبیات نشان می‌دهد گزارش شفاف مفروضات، اعتبارسنجی و ملاحظات عدم قطعیت می‌تواند جایگاه مدل‌های داده‌محور را در چارچوب مهندسی تقویت کند.

پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهند که مدل‌های جانشین مبتنی بر شبکه‌های عصبی مصنوعی در پیش‌بینی رفتار الاستوپلاستیک مواد فلزی، مانند آلیاژهای تیتانیوم یا آلومینیوم، موفق بوده‌اند. برای مثال، یک مدل داده‌محور بهبودیافته برای پیش‌بینی پاسخ مکانیکی وابسته به نرخ کرنش و دما در آلیاژ Ti-6Al-4V توسعه یافت که با استفاده از استراتژی‌های بازسازی کرنش و افزایش داده، دقت بالایی در پیش‌بینی رفتار غیرخطی به دست آورد و قابلیت ادغام با شبیه‌سازی‌های FEA را داشت (Hashemi et al., 2023). همچنین، در رویکردی چندمقیاسه به نام FEANN، شبکه‌های عصبی فیزیک‌محدود به عنوان جایگزین FEA در سطح میکروسکوپی استفاده شدند تا رفتار همگن‌شده مواد پیچیده مانند کامپوزیت‌ها یا فلزات دوفازی را پیش‌بینی کنند که این روش هزینه محاسباتی را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد در حالی که دقت را حفظ می‌کند (Ghaboussi et al., 1991). این رویکرد شامل تولید داده اولیه از موارد بارگذاری ساده، آموزش ANN برای پیش‌بینی تنش از تغییرشکل، و استخراج داده خودکار برای غنی‌سازی مجموعه داده است که می‌تواند برای ورق‌های فلزی تحت ضربه گسترش یابد.

در کاربردهای دینامیکی، مانند ضربه با سرعت بالا (Mirzababaie Mostofi et al., 2019c)؛ (Mirzababaie Mostofi & Babaei, 2019a)؛ (Mirzababaie Mostofi & Babaei, 2019b)، مدل‌های جایگزین مبتنی بر یادگیری ماشین می‌توانند پاسخ‌های ساختاری را با دقت بالا (اغلب با خطای کمتر از ۵٪ نسبت به FEA) پیش‌بینی کنند و زمان محاسباتی را به مراتب کاهش دهند (Marković et al., 2025). برای مثال، در مطالعه‌ای بر روی مدل‌های جایگزین برای پاسخ دینامیکی سیستم‌های مکانیکی، چارچوبی پیشنهاد شد که شامل پیش‌پردازش داده، انتخاب ویژگی، آموزش مدل و

سناریوهای بارگذاری متنوع همچنان از مباحث کلیدی این حوزه است (Fakhrusy & Rosalia, 2025). در کاربردهای تحلیل سازه و مواد، شواهد جدیدی وجود دارد که ML می‌تواند به‌عنوان جایگزین سریع و قابل اعتماد برای FEM در پیش‌بینی پاسخ‌های مکانیکی به کار رود، به‌ویژه زمانی که مسئله پیچیده و انجام FEM برای سناریوهای متعدد بسیار زمان‌بر باشد. به عنوان نمونه، پی و همکاران (Pei et al., 2025) یک رویکرد جانشین مبتنی بر یادگیری ماشین را برای پیش‌بینی خواص مکانیکی یک کامپوزیت پیچیده (لاستیک تایلر بازیافتی) ارائه و آن را به‌عنوان جایگزین سریع برای تحلیل FEM مطرح کردند؛ این کار نمونه‌ای از روند جدید «جانشین‌سازی تحلیل‌های پرهزینه برای تصمیم‌سازی سریع‌تر» است.

علاوه بر رویکردهای صرفاً داده‌محور، رویکردهای فیزیک-آگاه<sup>۱</sup> نیز در سال‌های اخیر پررنگ شده‌اند؛ هدف این است که با تزریق دانش فیزیکی، هم نیاز داده کاهش یابد و هم تعمیم‌پذیری افزایش پیدا کند. برای مثال، لچنر و همکاران (Lechner et al., 2025) در مدل‌سازی سریع فرآیند خم‌کاری آزاد با تلفیق نظریه تیر تیموشنکو و یک مدل یادگیری ماشین نشان دادند که می‌توان کیفیت پیش‌بینی را نسبت به یک مدل کاملاً داده‌محور بهبود داد و همزمان زمان محاسبه را به‌طور چشمگیری کاهش داد (در مقیاس چند مرتبه بزرگی). این دسته پژوهش‌ها نشان می‌دهد «ترکیب فیزیک و داده» یکی از روندهای مهم و جدید در ساخت مدل‌های جانشین قابل اتکا است.

در کنار دقت پیش‌بینی، توجه به اعتبارسنجی و عدم قطعیت در مدل‌های جانشین نیز در ادبیات اخیر پررنگ شده است؛ زیرا خطای تقریب جانشین و محدودیت داده‌های آموزشی می‌تواند در تحلیل‌های مهندسی اثرگذار باشد. بنابراین، چارچوب‌های جدید برای کمی‌سازی عدم قطعیت و ارزیابی قابلیت اعتماد مدل‌های جانشین (به‌ویژه در تحلیل قابلیت اطمینان) توسعه یافته‌اند و گزارش این جنبه‌ها می‌تواند پذیرش صنعتی و آکادمیک مدل‌های داده‌محور را تقویت کند (Yong et al., 2024). مرور جامع آذرنوش و قزآن (Azarhoosh & Ghazaan, 2025) بر پیشرفت‌های اخیر مدل‌های جانشین برای عدم قطعیت‌سنجی مسائل

<sup>۱</sup> Physics-informed

پلاستیک دینامیکی مواد فلزی تحت بارهای ضربه‌ای هستند، اگرچه ممکن است در موارد پیچیده نیاز به داده‌های بیشتر داشته باشند.

- مزایای اصلی شامل کارایی محاسباتی، قابلیت تعمیم‌پذیری و ادغام با اصول فیزیکی است، اما چالش‌هایی مانند نیاز به داده‌های باکیفیت و جلوگیری از بیش‌برازش وجود دارد.

در ادبیات اخیر؛ یعنی، «پاسخ دینامیکی سازه‌ها تحت بارگذاری‌های هیدرودینامیکی»، مشاهده می‌شود که مدل‌های صریح/تحلیلی بسته برای توصیف کامل پاسخ (به‌ویژه در حضور کوپل دو طرفه سیال-سازه، غیرخطی‌های هندسی/مادی، و پدیده‌هایی مانند کاویتاسیون) محدود و کم‌کاربرد هستند؛ به‌طوری‌که حتی مدل‌های کلاسیک ساده‌ساز در برخی شرایط به‌دلیل پیچیدگی‌های فیزیکی (مانند تغییر رژیم سیال و کاویتاسیون) دچار افت اعتبار می‌شوند و در عمل، تحلیل‌های دقیق‌تر به سمت شبیه‌سازی‌های عددی کوپل سوق پیدا می‌کنند. با این حال، همین شبیه‌سازی‌های پر جزئیات معمولاً زمان‌بر و پرهزینه هستند و در مطالعاتی که نیاز به پیمایش گسترده پارامترها، تحلیل سناریوهای متعدد، یا طراحی/بهینه‌سازی دارند، به یک گلوگاه محاسباتی تبدیل می‌شوند. علاوه بر تسریع محاسبات، مزیت عملی مهم مدل‌های جانشین این است که با افزودن یک لایه تفسیرپذیری مبتنی بر تحلیل حساسیت/اهمیت پارامترها، می‌توان به‌صورت کمی نشان داد «کدام ورودی‌ها بیشترین سهم را در تغییرات خروجی دارند»؛ موضوعی که هم در درک مکانیزم اثرگذاری پارامترها و هم در اولویت‌بندی متغیرهای طراحی/کنترل برای کاربردهای مهندسی ارزشمند است. در پاسخ به این محدودیت‌ها، روند پژوهشی چند سال اخیر به سمت توسعه مدل‌های جانشین و روش‌های داده‌محور برای «پیش‌بینی سریع پاسخ» حرکت کرده است؛ به‌طوری‌که در برخی کارهای جدید، از الگوریتم‌های یادگیری ماشین برای ارزیابی سریع آسیب یا پاسخ سازه تحت بارهای انفجار زیرآبی و شرایط مشابه استفاده شده و هدف، کاهش وابستگی به اجرای تکراری شبیه‌سازی‌های سنگین است. بنابراین، با توجه به کمبود مدل‌های صریح قابل اتکا در دامنه‌های پیچیده هیدرودینامیکی و هزینه بالای روش‌های عددی دقیق، توسعه و به‌کارگیری مدل‌های

اعتبارسنجی است، و نتایج آن در مشکلات معیار و موارد واقعی نشان‌دهنده کارایی بالا بود (Tasdemir et al., 2025). علاوه بر این، استراتژی‌های ANN برای تحلیل تنش-کرنش مواد فلزی، با تمرکز بر تغییرشکل پلاستیک در آزمون‌های فرورفتگی، نشان دادند که مدل‌های آموزش‌دیده با داده‌های FE می‌توانند زمان محاسباتی را تا ۹۹/۷۸٪ کاهش دهند در حالی که خطای میانگین نسبی را به ۲/۸۷٪ برسانند (Bostanabad et al., 2018). این استراتژی‌ها شامل مدل‌سازی با پارامترهای متغیر ماده، آموزش نظارت‌شده، و اعتبارسنجی در برابر داده‌های تجربی هستند که می‌توانند برای پیش‌بینی پاسخ ورق‌های فلزی تحت ضربه اعمال شوند.

با وجود مزایا، چالش‌هایی مانند نیاز به داده‌های باکیفیت برای آموزش، حساسیت به بیش‌برازش، و محدودیت در تعمیم به شرایط خارج از محدوده داده وجود دارد. پژوهشگران پیشنهاد می‌کنند که ادغام ANN با شبکه‌های عصبی فیزیک‌آگاه<sup>۱</sup> می‌تواند این مسائل را حل کند، زیرا PINN‌ها معادلات فیزیکی را مستقیماً در فرآیند آموزش گنجانده و پیش‌بینی‌های سازگار با قوانین فیزیک تولید می‌کنند (Raissi et al., 2019). در نهایت، توسعه مدل‌های جانشین داده‌محور مبتنی بر ANN نه تنها کارایی را افزایش می‌دهد، بلکه امکان کاوش فضای طراحی بزرگ‌تر را فراهم می‌کند که این امر برای بهینه‌سازی ورق‌های فلزی در برابر بارهای ضربه‌ای ضروری است.

نکات کلیدی تحقیق به شرح زیر است:

- پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهند که مدل‌های جانشین داده‌محور مبتنی بر شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANN) قادرند به‌عنوان جایگزینی کارآمد برای تحلیل اجزای محدود (FEA) به‌کار گرفته شوند؛ به‌گونه‌ای که با کاهش چشمگیر هزینه و زمان محاسباتی، همچنان دقت قابل قبولی در پیش‌بینی پاسخ سیستم حفظ می‌شود.
- این رویکردها معمولاً بر اساس داده‌های تولیدشده از شبیه‌سازی‌های FEA یا آزمایش‌ها آموزش می‌دیدند و قادر به پیش‌بینی رفتار

<sup>۱</sup> Physics-Informed Neural Networks (PINNs)

(۱) آیا مدل داده‌محور پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان یک مدل جانشین برای پیش‌بینی سریع خروجی بر اساس ورودی‌ها عمل کند؟

(۲) چه میزان دقت و پایداری در داده‌های آموزش و آزمون حاصل می‌شود و آیا این سطح دقت برای کاربرد مورد نظر کافی است؟

(۳) آیا تحلیل خطا و ارزیابی آماری باقیمانده‌ها، قابلیت اعتماد نتایج مدل جانشین را تأیید می‌کند؟

با توجه به توضیحات ارائه‌شده، نوآوری تحقیق شامل موارد زیر است:

- ادغام مستقیم داده آزمایشگاهی به‌دست‌آمده برای دو هندسه جهت ساخت یک مدل جانشین کاملاً داده‌محور
- ارائه‌ی یک نگاشت «ورودی فرآیند» ← پاسخ پلاستیک دینامیکی» که مهندس طراح می‌تواند آن را برای انتخاب ضخامت و ماده و انرژی مجاز قبل از تست واقعی استفاده کند
- کاهش هزینه و زمان تحلیل نسبت به اجرای مکرر مدل‌سازی اجزای محدود با زمان اجرای بالا به دلیل ماهیت دو فازی مسئله؛ یعنی در نظر گرفتن برهمکنش سیال-سازه.
- گامی به سمت «طراحی مبتنی بر هوش مصنوعی» در شکل‌دهی و فرآیندهای ضربه‌ای

## ۲- روش‌شناسی تحقیق

شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANN) به دلیل توانایی در تقریب توابع غیرخطی پیچیده، ابزار مناسبی برای مدل‌سازی رفتار سازه‌ها در مهندسی عمران و مکانیک هستند. مطالعات نشان می‌دهند که مدل‌های ANN با دقت بالا و هزینه محاسباتی کم، جایگزین تحلیل‌های عددی سنتی می‌شوند و پس از آموزش، پیش‌بینی‌های سریع ارائه می‌دهند. این قابلیت آن‌ها را برای تحلیل‌های پارامتریک، ارزیابی اولیه طراحی و کاربردهای نیاز به بازخورد فوری مناسب می‌کند. در نهایت، رویکرد داده‌محور ANN جایگزین کارآمد برای روش‌های سنتی در مسائل مهندسی، به ویژه مکانیک سازه، است.

جانشین، در این حوزه کاربردی و توجیه‌پذیر بوده و به‌عنوان یک راهبرد عملی برای تسریع تحلیل دینامیکی سازه‌ها تحت بارگذاری هیدرودینامیکی مطرح می‌شود. با توجه به توضیحات ارائه‌شده، تحقیق حاضر بر توسعه یک مدل جایگزین تمرکز دارد که از یادگیری ماشین برای شبیه‌سازی رفتار مواد استفاده می‌کند. «مدل جانشین داده‌محور» به مدلی اشاره دارد که از داده‌های موجود (مانند نتایج FEA یا آزمایش‌ها) برای پیش‌بینی سریع استفاده می‌کند، بدون حل معادلات فیزیکی پیچیده. «مبتنی بر شبکه عصبی مصنوعی» یعنی استفاده از ANN برای یادگیری الگوها که می‌تواند روابط غیرخطی مانند تغییرشکل پلاستیک را مدل کند. «جایگزین تحلیل اجزای محدود» نشان‌دهنده هدف کاهش وابستگی به FEA است که روشی عددی برای حل مسائل مکانیکی است اما محاسباتی سنگین دارد. «پیش‌بینی پاسخ پلاستیک دینامیکی» به پیش‌بینی رفتار مواد در نرخ‌های کرنش بالا (مانند ضربه) اشاره دارد، جایی که مواد فلزی تغییرشکل دائمی نشان می‌دهند. در نهایت، «ورق‌های فلزی تحت بارگذاری ضربه‌ای» کاربرد را در مواد نازک فلزی مانند فولاد یا آلومینیوم در شرایط ضربه‌ای مشخص می‌کند که در صنایع خودرو و هوافضا رایج است. این موضوع اهمیت زیادی دارد زیرا بارهای ضربه‌ای می‌توانند منجر به شکست سازه‌ها شوند، و پیش‌بینی دقیق کمک به طراحی مقاوم می‌کند. برای مثال، در خودروسازی، شبیه‌سازی تصادف نیاز به مدل‌های سریع دارد. مدل‌های ANN می‌توانند در بهینه‌سازی استفاده شوند، جایی که هزاران شبیه‌سازی لازم است. تحقیقات نشان می‌دهد که این رویکردها در پیش‌بینی خستگی و تغییرشکل تحت بارهای چرخه‌ای موفق بوده‌اند، و می‌توانند به کاهش هزینه‌های آزمایش کمک کنند. مدل‌های جایگزین مانند ANN زمان محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهند و امکان پیش‌بینی واقعی‌زمان را فراهم می‌کنند. برخلاف FEA که ممکن است ساعت‌ها طول بکشد، ANN پس از آموزش، پیش‌بینی را در ثانیه‌ها انجام می‌دهد. همچنین، آن‌ها می‌توانند با داده‌های واقعی ادغام شوند تا دقت افزایش یابد.

این پژوهش به دنبال پاسخ‌گویی به سوالات زیر است:

## ۲-۱- معرفی مکانیسم روش گروهی پردازش داده‌ها<sup>۱</sup> برای مدل‌سازی سیستم

در ابتدا، زمینه فکری و تاریخی روش گروهی پردازش داده‌ها (GMDH) را تبیین می‌شود. در این بخش، GMDH نه صرفاً به عنوان یک الگوریتم دیگر، بلکه به عنوان یک تغییر پارادایم از رویکردهای مدل‌سازی سنتی معرفی می‌شود و بر بنیاد آن در خود-سازماندهی اکتشافی تأکید می‌گردد. روش گروهی پردازش داده‌ها (GMDH) در سال ۱۹۶۸ توسط ایواخنکو در مؤسسه سایبرنتیک کی‌یف، اوکراین، بنیان نهاده شد. GMDH از همان ابتدا به عنوان یک روش استقرایی و مبتنی بر کامپیوتر برای مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده‌ای طراحی شد که در آن‌ها دانش پیشینی (a priori) کمیاب یا غیرقابل اعتماد است. این ویژگی برای داده‌های تجربی که در آن‌ها قوانین فیزیکی زیربنایی ممکن است به طور کامل شناخته شده نباشند، حیاتی است. مفهوم «خود-سازماندهی» در چارچوب GMDH به معنای تعیین خودکار و داده‌محور هم ساختار مدل و هم پارامترهای آن است. این رویکرد در تضاد کامل با روش‌های متداول مانند رگرسیون استاندارد یا پرسپترون چندلایه<sup>۲</sup> (MLP) قرار دارد که در آن‌ها ساختار مدل (مانند تعداد لایه‌ها، تعداد نورون‌ها یا متغیرهای رگرسیونی خاص) توسط پژوهشگر از پیش تعریف می‌شود و این امر می‌تواند سوگیری بالقوه‌ای را به مدل تحمیل کند. این فرآیند استقرایی شباهت زیادی به تکامل بیولوژیکی یا انتخاب طبیعی دارد: مدل‌های ساده تولید می‌شوند، در برابر محیط (داده‌ها) ارزیابی می‌گردند و تنها «سازگارترین» آن‌ها برای تشکیل پایه‌ای برای مدل‌های پیچیده‌تر در نسل (لایه) بعدی باقی می‌مانند. این فرآیند به مدل اجازه می‌دهد تا به طور خودکار به پیچیدگی بهینه دست یابد و تعادلی میان دقت و خطر بیش‌برازش<sup>۳</sup> برقرار کند؛ مفهومی که به طور رسمی تحت عنوان موازنه بایاس-واریانس<sup>۴</sup> شناخته می‌شود. این قابلیت تعیین خودکار هایپرپارامترهایی مانند عمق شبکه، انتخاب نورون و حتی اهمیت ویژگی‌ها، GMDH را به عنوان یک پیش‌درآمد مستقیم برای حوزه مدرن یادگیری ماشین

خودکار (AutoML) مطرح می‌کند. هدف اصلی ایواخنکو کاهش سوگیری پژوهشگر و تلاش دستی برای طراحی مدل بود که دقیقاً همان انگیزه‌های اصلی AutoML امروزی است.

طراحی GMDH تحت تأثیر چندین اصل فلسفی و علمی کلیدی قرار گرفته است:

- **مفهوم سایبرنتیکی «جعبه سیاه»:** مدل‌سازی سیستم‌ها بر اساس روابط ورودی-خروجی بدون نیاز به دانش کامل از مکانیزم‌های داخلی آن‌ها.
- **قضایای ناتمامیت گودل:** این قضایا ایجاب می‌کنند که برای ارزیابی عینی اعتبار یک مدل، به یک «مکمل خارجی» (مجموعه داده اعتبارسنجی) نیاز است.
- **اصل انتخاب ژنتیکی متوالی ویژگی‌های زوجی:** این اصل، اساس ساختار لایه‌به‌لایه GMDH را تشکیل می‌دهد.

استفاده از یک مجموعه داده جداگانه برای اعتبارسنجی، صرفاً یک ترفند عملی برای جلوگیری از بیش‌برازش نیست؛ بلکه کاربرد مستقیم قضایای ناتمامیت گودل در مدل‌سازی است. این قضایا بیان می‌کنند که سازگاری یک سیستم را نمی‌توان از درون اصول موضوعه خود آن سیستم اثبات کرد. در مدل‌سازی، مجموعه داده آموزشی «اصول موضوعه» مدل را تعریف می‌کند. ارزیابی عملکرد مدل بر روی همان داده‌های آموزشی (یک معیار داخلی) یک استدلال دوری است؛ زیرا یک مدل با پیچیدگی کافی همیشه می‌تواند به خطای صفر بر روی داده‌های آموزشی دست یابد. مجموعه داده اعتبارسنجی به عنوان «مکمل خارجی» یا «فرا-اطلاعات» ضروری عمل می‌کند و یک چارچوب مرجع عینی و خارجی برای قضاوت در مورد توانایی تعمیم واقعی مدل فراهم می‌آورد. این امر، تقسیم داده‌ها به دو بخش آموزش و اعتبارسنجی را از یک مرحله رویه‌ای صرف، به یک اصل فلسفی بنیادین در مدل GMDH ارتقا می‌دهد.

در ادامه به تشریح اجزای شبکه GMDH و منطق ریاضی حاکم بر عملکرد آن می‌پردازد. تمرکز این بخش بر روی «چگونگی» ساخت شبکه و پردازش اطلاعات در آن است. نورون چندجمله‌ای به عنوان واحد سازنده اصلی است. در

<sup>1</sup> Group Method of Data Handling (GMDH)

<sup>2</sup> Multi-layer Perceptron (MLP)

<sup>3</sup> Overfitting

<sup>4</sup> Bias-variance tradeoff

این قابلیت، GMDH را در جایگاهی میان دقت پیش‌بینی (مانند سایر شبکه‌های عصبی) و تفسیرپذیری مدل (مانند رگرسیون کلاسیک) قرار می‌دهد که یک مزیت قابل توجه در تحقیقات علمی است؛ جایی که درک «چرا» به اندازه «چه» اهمیت دارد. در ادامه، گردش کار گام‌به‌گام برای سنتز مدل GMDH آورده شده است. این بخش به عنوان یک راهنمای روش‌شناختی رسمی عمل می‌کند و الگوریتم GMDH را به صورت دنباله‌ای از مراحل مجزا تشریح می‌نماید:

### گام ۱: آماده‌سازی و تقسیم‌بندی داده‌ها

اولین و حیاتی‌ترین گام، تقسیم داده‌های تجربی موجود به حداقل دو، و در حالت ایده‌آل سه، زیرمجموعه مجزا است.

- **مجموعه آموزش<sup>۲</sup>:** این مجموعه منحصراً برای تخمین ضرایب (اول تا ششم) هر نورون چندجمله‌ای کاندید با استفاده از یک روش رگرسیونی مانند کمترین مربعات معمولی (OLS) به کار می‌رود.
- **مجموعه اعتبارسنجی<sup>۳</sup>:** این مجموعه منحصراً برای ارزیابی عملکرد نورون‌های کاندید استفاده می‌شود. معیار خارجی (مثلاً RMSE) بر روی این مجموعه محاسبه می‌شود تا «سازگارترین» نورون‌ها برای لایه بعدی انتخاب شوند. این مجموعه فرآیند خود-سازماندهی را هدایت کرده و از بیش‌برازش جلوگیری می‌کند.
- **مجموعه آزمون<sup>۴</sup>:** یک مجموعه سوم اختیاری اما بسیار توصیه‌شده که از هر دو فرآیند آموزش و اعتبارسنجی کنار گذاشته می‌شود. این مجموعه تنها یک بار، در انتهای فرآیند، برای ارائه یک تخمین بی‌طرفانه از عملکرد تعمیم مدل نهایی بر روی داده‌های کاملاً دیده‌نشده استفاده می‌شود.

### گام ۲: تولید و انتخاب لایه‌ای تکرارشونده

- **لایه ۱:** تمام ترکیبات زوجی از متغیرهای ورودی اولیه تولید می‌شوند (اگر  $m$  متغیر ورودی داشته باشیم،  $m(m-1)/2$  نورون ایجاد

واقع، واحد بنیادین یک شبکه GMDH، نورونی است که معمولاً دو ورودی و یک خروجی دارد. تابع انتقال استاندارد این نورون، چندجمله‌ای ایواخنکو است که یک چندجمله‌ای درجه دوم کامل از دو متغیر است. اهمیت این انتخاب در سادگی و انعطاف‌پذیری آن نهفته است. این تابع قادر است تعاملات غیرخطی (جمله آخر) و روابط درجه دوم (جملات چهارم و پنجم) را مدل کند. با قرار دادن این توابع درجه دوم ساده به صورت لایه‌لایه، شبکه می‌تواند یک مدل نهایی بسازد که در واقع یک چندجمله‌ای مرتبه بالا و بسیار پیچیده (یک چندجمله‌ای چندمتغیره) است و چندجمله‌ای کولموگروف-گابور را تقریب می‌زند. ساختار شبکه‌ای پیش‌خور و لایه‌ای است. در واقع، معماری شبکه GMDH یک ساختار چندلایه است که در آن خروجی‌های یک لایه به ورودی‌های لایه بعدی تبدیل می‌شوند. فرآیند ترکیب زوجی به این صورت است که در هر لایه، تمام ترکیبات دوتایی ممکن از ورودی‌ها (که از خروجی‌های منتخب لایه قبل یا ورودی‌های اصلی گرفته شده‌اند) برای ایجاد نسل جدیدی از نورون‌های کاندید استفاده می‌شوند. به عنوان مثال، برای  $n$  ورودی، تعداد  $n(n-1)/2$  نورون کاندید تولید می‌شود. باید تأکید کرد که برخلاف شبکه‌های کاملاً متصل مانند MLP، ساختار GMDH خلوت<sup>۱</sup> است و به صورت لایه‌به‌لایه تکامل می‌یابد. اتصالات از پیش تعریف نشده‌اند، بلکه نتیجه فرآیند انتخاب هستند. «معیار خارجی» مکانیزم اصلی برای انتخاب مدل و کنترل پیچیدگی در GMDH است. این معیار یک سنجه عملکرد (مانند میانگین مربعات خطا یا مجموع مربعات خطای پیش‌بینی‌شده) است که بر روی بخش جداگانه‌ای از داده‌ها (مجموعه اعتبارسنجی یا «بررسی») محاسبه می‌شود که برای تخمین ضرایب چندجمله‌ای استفاده نشده است. محصول نهایی یک اجرای GMDH، یک جعبه سیاه از وزن‌ها و سوگیری‌ها (بایاس‌ها) نیست، بلکه یک معادله چندجمله‌ای صریح است. این ویژگی، GMDH را به ابزاری قدرتمند برای پیش‌بینی خروجی یک مجموعه داده با استخراج مدل ریاضی تبدیل می‌کند، زیرا مدل نهایی به طور مستقیم قابل تفسیر است و به طور بالقوه می‌تواند قوانین فیزیکی یا روابط پنهان در داده‌ها را آشکار سازد.

<sup>2</sup> Training Set

<sup>3</sup> Validation/Checking Set

<sup>4</sup> Test Set

<sup>1</sup> Sparse

کامل برای این نورون که با ردیابی به عقب از طریق لایه‌های قبلی به دست می‌آید، معادله پیش‌بینی نهایی را تشکیل می‌دهد.

این معیار توقف، در واقع پیاده‌سازی تکنیک تنظیم «توقف زودهنگام» است. با این حال، به جای متوقف کردن آموزش یک شبکه با معماری ثابت پس از تعداد مشخصی تکرار (epoch)، GMDH رشد خود معماری را متوقف می‌کند. این شکل عمیق‌تری از تنظیم است، زیرا ظرفیت و ساختار بنیادی مدل را کنترل می‌کند، نه فقط مقادیر پارامترهای آن را، و به طور مستقیم به موازنه بایاس-واریانس می‌پردازد.

## ۲-۲- پیاده‌سازی روش انتخابی

در مدل‌سازی‌های عددی با استفاده از روش‌های هوشمند، تنها ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم در دسترس قرار دارند و اجزای داخلی سیستم ناشناخته باقی می‌مانند؛ بنابراین، شناسایی سیستم بر پایه اطلاعات ورودی‌ها و خروجی‌های مورد نظر انجام می‌پذیرد. به طور کلی، نتیجه این شناسایی، یک تابع تقریبی ریاضی خواهد بود که این تابع چندجمله‌ای در اصل یک رابطه میان خروجی و ورودی‌ها محسوب شده و مدلی برای سیستم به شمار می‌رود. در حالت کلی، فرضیه مسئله شناسایی سیستم به این صورت مطرح می‌شود که در آن، رابطه میان خروجی ( $y$ ) یک سیستم ناشناخته با  $m$  ورودی آن به شکل معادله (۱) بیان می‌گردد (Jamali et al., 2020).

$$y_i = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \quad (1)$$

با در اختیار داشتن  $N$  نمونه از داده‌های خروجی و ورودی، سیستمی مشابه ماتریس ارائه‌شده در رابطه (۲) حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1m} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2m} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & x_{N3} & \dots & x_{Nm} & y_N \end{bmatrix} \quad (2)$$

نتیجه عملیات شناسایی سیستم، تقریبی از تابع  $\hat{f}$  است که بر اساس آن، می‌توان به ازای بردار ورودی  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$  مقدار خروجی  $\hat{y}$  را طبق رابطه (۳) تخمین زد.

$$\hat{y} = \hat{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \quad (3)$$

می‌شود). برای هر نورون، ضرایب چندجمله‌ای درجه دوم آن با استفاده از مجموعه آموزش برازش داده می‌شوند.

• **انتخاب: معیار خارجی؛** یعنی، RMSE، برای هر یک از این نورون‌ها با استفاده از مجموعه اعتبارسنجی محاسبه می‌شود. تعداد معینی ( $F$ ) که به آن «آزادی انتخاب» می‌گویند از نورون‌های با بهترین عملکرد (آنهایی که کمترین خطا را دارند) برای بقا و انتقال به مرحله بعد انتخاب می‌شوند. بقیه نورون‌ها حذف می‌گردند.

• **لایه‌های بعدی:** خروجی‌های نورون‌های منتخب از لایه قبل، به عنوان ورودی‌های جدید عمل می‌کنند. این فرآیند تکرار می‌شود: تمام ترکیبات زوجی از این ورودی‌های جدید تولید می‌شوند، ضرایب آن‌ها بر روی مجموعه آموزش برازش داده می‌شوند، عملکردشان بر روی مجموعه اعتبارسنجی ارزیابی می‌شود و بهترین  $F$  نورون انتخاب می‌گردند.

## گام ۳: معیار توقف و انتخاب مدل نهایی

فرآیند ساخت لایه‌ها بی‌نهایت نیست و بر اساس یک قانون توقف حیاتی که برای جلوگیری از بیش‌برازش طراحی شده، خاتمه می‌یابد.

• **قانون توقف:** پس از ساخت هر لایه، حداقل خطای (بر روی مجموعه اعتبارسنجی) بهترین نورون در لایه فعلی با حداقل خطای لایه قبلی مقایسه می‌شود.

○ اگر  $\text{Error}_{2^{\text{nd}} \text{ layer}} < \text{Error}_{1^{\text{st}} \text{ layer}}$  باشد مدل همچنان در حال بهبود توانایی تعمیم خود است. فرآیند به لایه بعدی ادامه می‌یابد.

○ در غیر این صورت خطای اعتبارسنجی شروع به افزایش کرده است. این نشانه کلاسیک بیش‌برازش است. الگوریتم متوقف می‌شود.

• **مدل نهایی:** بهترین نورون از آخرین لایه‌ای که در آن خطا کاهش یافته است، به عنوان مدل نهایی انتخاب می‌شود. عبارت چندجمله‌ای

$$\min \left( r_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - y_{ij}^*)^2}{\sum_{i=1}^N y_i^2} \right) \quad (۶)$$

در رابطه بالا  $j \in \{1, 2, 3, \dots, C_m^2\}$  است که در آن  $m$  تعداد عصب‌های گزینش‌شده در لایه قبلی است. نگاشتی که بین متغیرهای ورودی و خروجی توسط این نوع از شبکه‌های عصبی برقرار می‌شود به صورت تابع غیرخطی ولترا، به فرم رابطه (۷) است.

$$\hat{y} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (۷)$$

ساختار در نظر گرفته برای عصب‌ها به صورت چندجمله‌ای دومتغیره درجه دوم همانند رابطه (۸) است.

$$y_i = f(x_{ip}, x_{jq}) = a_0 + a_1 x_{ip} + a_2 x_{iq} + a_3 x_{ip} x_{iq} + a_4 x_{ip}^2 + a_5 x_{iq}^2 \quad (۸)$$

هدف در الگوریتم GMDH یافتن ضرایب ناشناخته  $a_0$  است. تابع  $f$  در رابطه (۸) دارای شش ضریب مجهول است. لذا بایستی آن‌ها طوری تعیین شوند که به ازای تمام نمونه‌های دو متغیر وابسته به سیستم؛ یعنی،  $\{(x_{ip}, x_{iq}), i = 1, 2, \dots, N\}$  خروجی مطلوب  $\{(y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$  برقرار گردد. به همین خاطر تابع  $f$  را بر اساس قاعده کمترین مربعات خطا، طبق رابطه (۹) ارائه شده است.

$$\min \left( \sum_{k=1}^N [(f(x_{ki}, x_{kj}) - y_i)^2] \right) \quad (۹)$$

باتوجه به شرایط موجود در مسئله، سیستم معادلات شامل شش متغیر مجهول و  $N$  معادله بر اساس رابطه (۱۰) می‌باشد.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_{1p} + a_2 x_{1q} + a_3 x_{1p} x_{1q} + \dots \\ \quad + a_4 x_{1p}^2 + a_5 x_{1q}^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_{2p} + a_2 x_{2q} + a_3 x_{2p} x_{2q} + \dots \\ \quad + a_5 x_{2p}^2 + a_5 x_{2q}^2 = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_{Np} + a_2 x_{Nq} + a_3 x_{Np} x_{Nq} + \dots \\ \quad + a_5 x_{Np}^2 + a_5 x_{Nq}^2 = y_N \end{cases} \quad (۱۰)$$

دستگاه معادله رابطه (۱۰) را می‌توان به فرم ماتریسی رابطه (۱۱) نمایش داد که در آن، مقادیر  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{A}$  بر اساس روابط (۱۲) و (۱۳) محاسبه می‌شوند و بردار  $Y$  مقادیر خروجی هم از رابطه (۱۴) به دست می‌آید:

در ادامه، کمینه کردن مجموع مربعات خطا به ازای  $N$  نمونه به‌عنوان هدف مشترک روش‌های شناسایی سیستم مطرح می‌گردد که در رابطه (۴) آمده است که در آن تابع  $(\hat{f})$  می‌تواند به صورت تابع غیرخطی و یا خطی از ورودی‌های سیستم باشد.

$$\min \left( \sum_{i=1}^N [\hat{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) - y_i]^2 \right) \quad (۴)$$

شبکه GMDH، شبکه‌ای خود یک‌سویه و سازمانده است که از متشکل از چندین لایه و هر لایه نیز تشکیل شده از چندین عصب می‌باشد. تمامی عصب‌ها از یک ساختار مشابهی برخوردار می‌باشند، همگی آن‌ها دارای دو ورودی و یک خروجی‌اند و هر نرون با  $\Delta$  وزن و یک بایاس عمل پردازش را میان داده‌های ورودی و خروجی برقرار می‌کند که در رابطه (۵) نشان داده شده است.

$$y_{ik}^* = N(x_{i\alpha}, x_{i\beta}) = b^k + w_1^k x_{i\alpha} + w_2^k x_{i\beta} + w_3^k x_{i\alpha}^2 + w_4^k x_{i\beta}^2 + w_5^k x_{i\alpha} x_{i\beta} \quad (۵)$$

در رابطه بالا،  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  است که در آن  $N$  تعداد نمونه‌های ورودی و خروجی بوده و  $(K = 1, 2, 3, \dots, C_m^2)$  و  $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$  می‌باشد، که در آن‌ها  $m$  تعداد نرون‌های لایه قبلی است.

وزن‌ها بر اساس روش کمترین مربعات خطا محاسبه شده و سپس به‌عنوان مقادیر مشخص و ثابت در داخل هر عصب جایگذاری می‌شود. در این نوع از شبکه‌ها عصب‌های مرحله قبلی و یا لایه قبلی ( $m$ ) عامل و یا مولد تولید عصب‌های جدید (به تعداد  $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{m}$ ) اند. از میان عصب‌های تولیدشده، لزوماً بایستی تعدادی از آن‌ها حذف گردند تا بدین‌وسیله از واگرایی شبکه جلوگیری به عمل آید. اصطلاحاً به این‌گونه عصب‌های حذف‌شده، عصب مرده گفته می‌شود. عصب‌هایی که برای ادامه و گسترش شبکه باقی می‌مانند، امکان دارند برای ایجاد فرم همگرایی شبکه و عدم ارتباط آن‌ها با عصب لایه آخر حذف گردند، که اصطلاحاً به آن‌ها عصب غیرفعال می‌گویند. میزان مجموع مربعات خطا  $(r_j^2)$  میان مقادیر خروجی واقعی  $(y_i)$  و خروجی عصب  $z$  ام  $(y_{ij}^*)$  ملاک و معیاری برای حذف مجموعه‌ای از عصب‌ها در یک لایه است که در رابطه (۶) نشان داده شده است.



### ۲-۳- ارائه ورودی و خروجی‌های شبکه بر مبنای بی‌بعدسازی معادلات حاکم بر سیستم مکانیکی

تحلیل نیرویی برای یک المان از ورق، معادلات حاکم بر ورق تحت بار دینامیکی به صورت روابط (۳۲) تا (۳۴) ارائه می‌شود که با جایگذاری رابطه (۳۲) و (۳۳) در (۳۴)، معادله به فرم رابطه (۳۵) تبدیل می‌گردد (Babaei & Mostofi, 2020a; Mostofi et al., 2017; Babaei et al., 2017b).

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (32)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad (33)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P = \rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \quad (35)$$

در معادلات بالا،  $M_x, M_y, M_{xy}$  گشتاورهای خمشی،  $P$  نیروی دینامیکی،  $H$  ضخامت ورق و  $w$  میزان جابجایی ورق است. هنگامی که نیروهای برشی  $Q_x$  و  $Q_y$  به عنوان نیروهای عامل در نظر گرفته می‌شوند، جریان پلاستیک دینامیکی ماده توسط گشتاورهای خمشی  $M_x, M_y$  و  $M_{xy}$  کنترل می‌شود. بر این اساس معیار عملکرد فون-مایسز در فضای نیروی سه‌بعدی عمومی برای جریان پلاستیک  $m_x = M_x/M_0, m_y = M_y/M_0$  و  $m_{xy} = M_{xy}/M_0$  هستند. همچنین،  $M_0$  گشتار خمشی کاملاً پلاستیک می‌باشد که به راحتی از رابطه  $\frac{\sigma_0 H^2}{4}$  قابل محاسبه است. در یک ورق مربعی کاملاً گیردار در لبه‌های مرزی، لولا پلاستیکی در دو قطر و چهار مرز گیردار روی محیط ورق شکل می‌گیرد و مقدار نیروی تعمیم‌یافته باید در نقاط متقاطع با محور عمودی، ۱ باشد. در لولاهای پلاستیک نیز باید سرعت خیز دائمی ورق صفر باشد. همچنین در مرزهای گیردار باید خیز و سرعت اولیه مقداری برابر با صفر داشته باشد.

با توجه به اینکه موضوع مورد نظر در این تحقیق بررسی تغییر شکل بزرگ ورق بوده، لذا افزودن نیروهای غشایی

معکوس ماتریس  $A$ ، از روش تجزیه مقادیر منفرد استفاده می‌شود.

در روش تجزیه مقادیر منفرد ماتریس غیرعادی  $A$  به حاصل ضرب یک ماتریس متعامد ستونی  $U \in \mathbb{R}^{M \times K}$ ، یک ماتریس قطری  $W \in \mathbb{R}^{K \times K}$  با عناصر مثبت یا صفر (مقادیر تکینه) و ترانهاد یک ماتریس متعامد  $V \in \mathbb{R}^{K \times K}$  تجزیه می‌شود، به طوری که

$$A = U W V^T \quad (30)$$

( $K$  تعداد گروه‌های مستقل است). هدف، انتخاب بهینه بردار ضرایب در معادله (۳۰) است که این امر مستلزم یافتن معکوس اصلاح‌شده ماتریس قطری  $W$  است. بدین منظور، معکوس عناصر قطر با تکینه‌های صفر یا نزدیک به صفر ( $\frac{1}{w_j} = 0$ ) برابر صفر قرار داده می‌شوند، سپس بردار ضرایب بهینه‌شده مطابق رابطه زیر به دست می‌آید.

$$X = V \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{w_j} \right) \right] U^T Y \quad (31)$$

نمونه‌برداری تصادفی نقش حیاتی در فرآیند تقسیم‌بندی داده‌ها برای مدل‌های یادگیری ماشین، مانند GMDH توسعه‌یافته در اینجا، ایفا می‌کند. در این زمینه، نمونه‌برداری تصادفی به روشی اشاره دارد که برای تقسیم مجموعه داده به زیرمجموعه‌های آموزش و آزمون استفاده می‌شود. به طور خاص، از تقسیم تصادفی برای اطمینان از اینکه انتخاب نقاط داده برای هر زیرمجموعه بدون سوگیری و نماینده توزیع کلی است، بهره گرفته شد. این رویکرد، سوگیری‌های بالقوه ناشی از تقسیم‌بندی متوالی یا سیستماتیک را کاهش می‌دهد و در نتیجه، توانایی مدل در تعمیم به داده‌های نادیده را افزایش می‌بخشد. برای ترویج تکرارپذیری، تقسیم تصادفی با یک مقدار بذر ثابت انجام گردید که تضمین می‌کند هر بار تکرار فرآیند تحت شرایط یکسان، همان تقسیم‌بندی به دست آید. هدف اصلی نمونه‌برداری تصادفی در این مرحله، شبیه‌سازی سناریوهای واقعی است که در آن مدل باید روی داده‌های جدید و مستقل عمل کند. با تخصیص تصادفی مشاهدات به مجموعه آموزش که برای برآزش مدل استفاده می‌شود و مجموعه آزمون که برای ارزیابی عملکرد آن به کار می‌رود؛ این فرآیند به ارزیابی استحکام مدل کمک می‌کند و از بیش‌برآزش جلوگیری می‌نماید، جایی که مدل ممکن است داده‌های آموزش را حفظ کند به جای یادگیری الگوهای زیرین.

آن است که پاسخ یک ورق با هر هندسه‌ای تحت بار دینامیکی باید بر مبنای سه عدد فوق‌الذکر بیان گردد. لذا در ادامه می‌توان مقدار کمی تنش تسلیم دینامیکی را بر حسب نرخ کرنش متوسط، ضرایب ماده و هندسه ورق در معادله وارد کرد. اکنون با به‌کارگیری معادله ساختاری کوپر-سیموندز و همچنین استفاده از مقدار نرخ کرنش متوسط برای یک ورق مستطیلی، عدد بی‌بعد اثر نرخ کرنش  $\xi$  به صورت معادله (۴۱) تعریف می‌گردد.

$$\sigma_d = \sigma_0 \left( 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}_m}{D} \right)^{\frac{1}{q}} \right) = \sigma_0 \left( 1 + \xi \left( \frac{W_0}{H} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \quad (39)$$

$$\dot{\epsilon}_m = \frac{V_0 W_0}{3\sqrt{2}LB} = \frac{I W_0}{12\sqrt{2}\rho H L^2 B^2} \quad (40)$$

$$\xi = \left( \frac{I}{12\sqrt{2}\rho L^2 B^2 D} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (41)$$

با جایگذاری معادلات (۳۹) و (۴۱) در معادله (۴۰)، تحلیل ابعادی برای معادله بی‌بعد حاکم بر ورق چهارگوش تحت بار دینامیکی یکنواخت منجر می‌شود به:

$$\frac{W_0}{H} = f \left( \frac{L}{H}, \frac{B}{H}, \frac{P}{\sigma_0}, \frac{1}{\xi} \right) = f \left( \frac{LB}{H^2}, \frac{\rho V_0^2}{\sigma_0}, \frac{1}{\xi} \right) \quad (42)$$

در نهایت، رابطه بیشترین خیز دائمی ورق به ضخامت آن برای ورق‌های تک‌لایه چهارگوش تحت بارگذاری دینامیکی یکنواخت بر حسب عدد بی‌بعد  $\psi$  برابر است با:

$$\frac{W_0}{H} = C_0 \cdot \psi \quad (43)$$

که در آن

$$\psi = \left( \frac{LB}{H^2} \right)^{C_1} \cdot \left( \frac{\rho V_0^2}{\sigma_0} \right)^{C_2} \cdot \left( \frac{1}{\xi} \right)^{C_3} \quad (44)$$

لازم به توضیح است که عدد بی‌بعد  $\psi$  برای تحلیل ورق‌های تک‌لایه چهارگوش تحت بارگذاری دینامیکی یکنواخت پیشنهاد شده که از معادله بی‌بعد حاکم بر ورق استخراج شده‌اند. شایان توجه است که در تحلیل ابعادی ساختارهای چهارگوش تحت بارگذاری هیدرودینامیکی، کمیت‌های فیزیکی مربوط به بارگذاری باید متناسب‌سازی شوند. مشخص است که کمیت ایمپالس با مجذور حاصل ضرب انرژی پتانسیل در جرم (ضربه‌زننده) متناسب است  $(I \propto \sqrt{EM})$ ؛ بنابراین، ترم دوم معادله (۴۴) که مربوط به اینرسی بار وارده به ورق است به صورت  $h \left( \frac{\rho V_0^2}{\sigma_0} \propto \frac{\rho EM}{m^2 \sigma_0} = \frac{M^2 gh}{16\rho L^2 B^2 H^2 \sigma_0} \right)$  تغییر می‌کند که  $h$  ارتفاع چکش از سطح ورق و  $M$  جرم ضربه‌زننده است. با

$(N_{xy}, N_y, N_x)$  در معادله (۳۶) الزامی است و این معادله به صورت معادله (۳۷) تغییر می‌کند.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (36) \\ & = \rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P \end{aligned}$$

با معرفی نمودن پارامترهای بی‌بعد نظیر  $X = x/L$ ،  $n_x = N_x/N_0$ ،  $T = C_s t/H$ ،  $W = w/H$ ،  $Y = y/L$ ،  $n_{xy} = N_{xy}/N_0$ ،  $n_y = N_y/N_0$  معادله حاکم بر ورق به فرم بی‌بعد معادله (۳۷) تبدیل می‌شود. در پارامترهای بی‌بعد ذکر شده،  $L$  نصف طول ورق مربعی،  $N_0$  نیروی غشایی کاملاً پلاستیک که برابر است با  $\sigma_0 H$ ،  $C_s$  سرعت صوت در محیط،  $X$  و  $Y$  مختصات بی‌بعد،  $T$  زمان بی‌بعد و  $W$  خیز بی‌بعد هستند. همچنین،  $m_x$ ،  $m_y$  و  $m_{xy}$  گشتاورهای خمشی بی‌بعد و  $n_x$ ،  $n_y$  و  $n_{xy}$  نیروهای غشایی بی‌بعد هستند.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial Y^2} \\ & + 4 \left( n_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2n_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + n_y \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \quad (37) \\ & = 4 \left( \frac{L}{H} \right)^2 \left( \frac{\rho C_s^2}{\sigma_0} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} - \frac{P}{\sigma_0} \right) \end{aligned}$$

در ادامه، جهت افزودن اثر حساسیت ماده به نرخ کرنش، رابطه (۳۷) به صورت معادله (۳۸) تغییر می‌کند.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 m_x}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial Y^2} \\ & + 4 \left( n_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2n_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + n_y \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \quad (38) \\ & = 4 \left( \frac{L}{H} \right)^2 \left( \frac{\rho C_s^2}{\sigma_d} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} - \frac{P}{\sigma_d} \right) \end{aligned}$$

همان‌طور که از معادله (۳۸) برمی‌آید، سه عبارت در آن وجود دارد: هندسه ساختار  $L/H$ ، توانایی مقاومت دینامیکی ماده در برابر تغییر شکل پلاستیک  $1/\sigma_d$  و نسبت بار دینامیکی به مقاومت ماده  $P/\sigma_d$  که فشار دینامیکی متناسب است با  $\rho V_0^2$ . این موضوع نشان‌دهنده

اغلب در نورون‌های برتر ظاهر می‌شوند و در نتیجه خطای مدل را کاهش می‌دهند، به عنوان مهم‌ترین شناسایی می‌شوند و ارزیابی اهمیت متغیر را بدون نیاز به مراحل اضافی فراهم می‌کنند.

## ۲) تحلیل حساسیت محلی<sup>۱</sup> (پس از آموزش):

این روش پس از ساخت مدل اعمال می‌شود و تغییرات خروجی را در پاسخ به اختلالات<sup>۲</sup> کوچک ورودی یا از طریق مشتقات جزئی ارزیابی می‌کند. برای اختلال، یک ورودی را به صورت جداگانه تغییر دهید (مثلاً  $\pm 1$  تا  $10\%$ ) اطراف مقادیر اسمی و تغییرات خروجی را اندازه‌گیری کنید تا حساسیت‌ها رتبه‌بندی شوند. به صورت تحلیلی، مشتقات جزئی خروجی چندجمله‌ای نسبت به هر ورودی محاسبه می‌شود که در نقاط کلیدی ارزیابی می‌شوند، برای ضرایب حساسیت نرمال شده. این رویکرد برای بینش‌های نقطه‌ای کارآمد است اما به رفتار محلی محدود می‌شود.

مورد اول تمرکز روی شناسایی اهمیت متغیر در حین آموزش دارد و مورد دوم به ارزیابی حساسیت خروجی پس از آموزش می‌پردازد.

## ۲-۵- مجموعه داده‌ها

در این پژوهش، از مجموعه داده‌های موجود مرتبط با فرآیند شکل‌دهی هیدرودینامیکی ورق که در مطالعات پیشین (Babaei et al., 2015a; Babaei et al., 2017a) ارائه شده‌اند، استفاده شده است. جزئیات کامل نتایج تجربی به‌طور مشروح در آن منابع آمده است و در اینجا تنها خلاصه‌ای از موارد ضروری برای بحث پیش‌رو ارائه می‌گردد (جداول ۱ و ۲). ورق‌های آزمایشی مورد استفاده در این پژوهش شامل دو شکل هندسی مستطیلی و دایره‌ای هستند. ورق‌های مستطیلی از جنس فولاد نرم و آلیاژ آلومینیوم، با ابعاد ۱۵۰ در ۲۰۰ میلی‌متر مربع و در ضخامت‌های (H) ۱، ۲ و ۳ میلی‌متر تهیه شدند. ورق‌های دایره‌ای نیز از همان دو جنس فولاد نرم و آلومینیوم تهیه شدند که ورق‌های فولادی در ضخامت‌های ۱ و ۲

توجه به نکات ذکر شده و مطابق با تحلیل ابعادی مسئله، نسبت بیشترین خیز دائمی به ضخامت ورق تحت بار هیدرودینامیکی برای یک ساختار چهارگوش به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{W_0}{H} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{B}{H}, \frac{P}{\sigma_0}, \frac{1}{\xi}\right) = f\left(\frac{LB}{H^2}, \frac{M^2 gh}{16\rho L^2 B^2 H^2 \sigma_0}, \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{M\sqrt{gh}}{12\sqrt{2}\rho L^2 B^2 D}}}}\right) \quad (45)$$

لازم به توضیح است که با تغییر پارامترهای هندسی B و L به R، رابطه برای یک ورق دایره‌ای نیز قابل استفاده است:

$$\frac{W_0}{H} = f\left(\frac{R}{H}, \frac{P}{\sigma_0}, \frac{1}{\xi}\right) = f\left(\frac{R^2}{H^2}, \frac{M^2 gh}{\rho\pi^2 R^4 H^2 \sigma_0}, \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{M\sqrt{gh}}{3\pi\sqrt{2}\rho R^4 D}}}}\right) \quad (46)$$

با توجه به روابط بالا، ورودی‌ها و خروجی مسئله کاملاً به صورت رابطه (۴۷) مشخص هستند.

$$\pi_0 = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad (47)$$

## ۲-۴- تحلیل حساسیت شبکه

تحلیل حساسیت برای مدل GMDH که شبکه‌های چندلایه چندجمله‌ای را از طریق خودسازماندهی القایی می‌سازد، می‌تواند از طریق سه رویکرد اصلی بسته به هدف انجام شود مانند شناسایی اهمیت متغیر در مرحله ساخت مدل یا ارزیابی حساسیت خروجی پس از آموزش.

### ۱) حساسیت ذاتی از طریق خودسازماندهی

(در حین ساخت مدل): این روش در فرآیند آموزش GMDH جاسازی شده است. الگوریتم به صورت تکراری، نورون‌های چندجمله‌ای را لایه به لایه تولید و ارزیابی می‌کند با استفاده از معیارهایی مانند میانگین مربعات خطا یا مجموع مربعات خطای پیش‌بینی شده روی داده‌های اعتبارسنجی و به‌طور خودکار متغیرهای ورودی تأثیرگذار و تعاملات آن‌ها را انتخاب و رتبه‌بندی می‌کند. متغیرهایی که

<sup>1</sup> Local sensitivity analysis

<sup>2</sup> Perturbations

میلی متر و ورق های آلومینیومی در ضخامت های ۱، ۲ و ۳ میلی متر مورد آزمایش قرار گرفتند.

جدول ۱. مجموعه داده برای ورق های دایره ای

جدول ۲. مجموعه داده برای ورق های مستطیلی

جدول ۱. مجموعه داده برای ورق های دایره ای

Table 2. Data set for rectangular plates

آزمایش	جنس	(mm) H	(cm) h	(mm) W <sub>0</sub>
۱	فولاد	۱	۲۵۰	۳۵/۶
۲	فولاد	۱	۲۰۰	۳۳/۹
۳	فولاد	۱	۲۲۵	۳۱/۱
۴	فولاد	۱	۱۷۰	۲۹/۰
۵	فولاد	۱	۱۵۰	۲۶/۸
۳۱	فولاد	۱	۱۲۵	۲۴/۳
۳۰	فولاد	۲	۲۸۰	۲۵/۱
۶	فولاد	۲	۲۵۰	۲۴/۰
۷	فولاد	۲	۲۲۵	۲۳/۷
۸	فولاد	۲	۲۰۰	۲۲/۵
۹	فولاد	۲	۱۷۰	۱۸/۲
۱۰	فولاد	۲	۱۵۰	۱۸/۱
۳۲	فولاد	۲	۱۲۵	۱۵/۸
۳۳	فولاد	۳	۳۵۰	۲۴/۷
۳۴	فولاد	۳	۳۲۵	۲۳/۹
۱۱	فولاد	۳	۲۸۰	۲۲/۱
۱۲	فولاد	۳	۲۵۰	۲۰/۳
۱۳	فولاد	۳	۲۲۵	۱۹/۴
۱۴	فولاد	۳	۲۰۰	۱۸/۱
۱۵	فولاد	۳	۱۷۰	۱۵/۱
۳۵	فولاد	۳	۱۵۰	۱۴/۷
۲۶	آلومینیوم	۱	۴۵	۲۸/۹
۱۶	آلومینیوم	۱	۴۰	۲۶/۰
۱۷	آلومینیوم	۱	۳۵	۲۴/۴
۲۷	آلومینیوم	۱	۳۰	۲۲/۵
۱۸	آلومینیوم	۱	۲۵	۲۱/۸
۱۹	آلومینیوم	۱	۲۰	۱۷/۵
۲۰	آلومینیوم	۱	۱۵	۱۴/۱
۲۸	آلومینیوم	۲	۹۰	۲۷/۶
۲۹	آلومینیوم	۲	۸۰	۲۵/۰
۲۱	آلومینیوم	۲	۷۰	۲۲/۸
۲۲	آلومینیوم	۲	۶۰	۱۸/۷
۲۳	آلومینیوم	۲	۵۰	۱۷/۰
۲۴	آلومینیوم	۲	۴۰	۱۴/۱
۲۵	آلومینیوم	۲	۳۰	۱۰/۷

Table 1. Data set for circular plates

آزمایش	جنس	(mm) H	(cm) h	(mm) W <sub>0</sub>
۱	فولاد	۱	۱۰۰	۱۶/۰
۲	فولاد	۱	۱۲۵	۱۷/۸
۳	فولاد	۱	۱۵۰	۱۹/۸
۱۶	فولاد	۱	۱۷۵	۲۳/۲
۱۷	فولاد	۱	۲۰۰	۲۶/۰
۱۸	فولاد	۱	۲۲۵	۲۹/۰
۴	فولاد	۲	۱۰۰	۱۱/۹
۵	فولاد	۲	۲۰۰	۱۴/۴
۶	فولاد	۲	۳۰۰	۱۸/۷
۱۹	فولاد	۲	۳۵۰	۲۳/۱
۲۰	فولاد	۲	۴۰۰	۲۴/۸
۲۱	فولاد	۲	۴۵۰	۲۸/۵
۷	آلومینیوم	۱	۱۰	۸/۲
۸	آلومینیوم	۱	۲۰	۱۱/۵
۹	آلومینیوم	۱	۳۰	۱۴/۴
۲۲	آلومینیوم	۱	۵۰	۱۹/۰
۲۳	آلومینیوم	۱	۷۰	۲۲/۰
۲۴	آلومینیوم	۱	۹۰	۲۳/۴
۱۰	آلومینیوم	۲	۳۰	۸/۹
۱۱	آلومینیوم	۲	۵۰	۱۴/۲
۱۲	آلومینیوم	۲	۶۵	۱۷/۱
۲۵	آلومینیوم	۲	۷۵	۲۰/۳
۲۶	آلومینیوم	۲	۱۰۰	۲۴/۳
۲۷	آلومینیوم	۲	۱۲۵	۲۹/۸
۱۳	آلومینیوم	۳	۵۰	۸/۵
۱۴	آلومینیوم	۳	۶۵	۹/۳
۱۵	آلومینیوم	۳	۱۰۰	۱۵/۳
۲۸	آلومینیوم	۳	۱۲۵	۱۸/۶
۲۹	آلومینیوم	۳	۱۵۰	۲۲/۴
۳۰	آلومینیوم	۳	۱۷۵	۲۵/۹

انرژی ضربه ایجاد شده در این روش، با چشم پوشی از اصطکاک، از طریق معادله  $E = Mgh$  محاسبه می شود که در آن  $M$  جرم چکش و  $h$  ارتفاع چکش نسبت به ورق قبل از سقوط آزاد است. خواص مکانیکی مواد از طریق آزمون کشش تک محوری به دست آمد. مقادیر تنش تسلیم استاتیکی و چگالی در مطالعات پیشین

## جدول ۳. دامنه تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌ها

Table 3. Range of variation of inputs and outputs

مقدار	ورودی			خروجی
	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_0$
کمینه	۸۳۳/۳۳۳۳	۳/۹۶۶۰	۰/۹۴۰۰	۲/۸۳۳۳
بیشینه	۱۰۰۰۰/۰	۱۳۶/۸۴۱۷	۴/۲۷۹۷	۳۵/۶۰
میانگین	۴۴۱۶/۶۶۶۷	۲۸/۷۷۳۵	۲/۱۷۸۶	۱۴/۰۲۷۳
واریانس	۱۲۳۱۵۰۸۱/۹۰۸۸	۵۶۹/۶۶۶۰	۱/۴۳۰۸	۶۹/۳۶۶۰
انحراف معیار	۳۵۰۹/۲۸۵۱	۲۳/۸۶۷۷	۱/۱۹۶۱	۸/۳۲۸۶

## جدول ۴. همبستگی جفتی بین متغیرهای ورودی

Table 4. Pairwise correlation between input variables

جفت متغیرها	پیرسون	p-value	اسپیرمن	p-value
$\pi_1 - \pi_2$	۰/۶۴۶۷۹۵	$۵/۸۶۰ \times ۱۰^{-۹}$	۰/۷۲۳۳۵۶	$۱/۰۰۴ \times ۱۰^{-۱۱}$
$\pi_3 - \pi_1$	۰/۱۳۲۵۲۷	$۲/۹۲۶ \times ۱۰^{-۱}$	۰/۳۸۵۰۱۰	$۱/۵۴۱ \times ۱۰^{-۳}$
$\pi_3 - \pi_2$	۰/۳۲۴۹۲۹	$۸/۲۶۸ \times ۱۰^{-۳}$	۰/۳۴۴۱۴۰	$۵/۰۰۰ \times ۱۰^{-۳}$

همبستگی‌های غیرصفر در سطح ضعیف تا متوسط به معنای آن است که ورودی‌ها ممکن است بخشی از تغییرپذیری مشترک را توضیح دهند، اما همچنان هر متغیر می‌تواند اطلاعات افزوده برای پیش‌بینی خروجی فراهم کند. بنابراین، استفاده همزمان از این ورودی‌ها قابل توجیه است و انتظار می‌رود مدل به‌جای اتکا به یک ورودی منفرد، از ترکیب سیگنال‌های مکمل بهره‌بردارد. همچنین، از آنجا که روش پیشنهادی ماهیت داده‌محور دارد و روابط غیرخطی را نیز می‌تواند جذب کند، گزارش ماتریس همبستگی صرفاً به‌عنوان یک کنترل مقدماتی ارائه شده و نتیجه‌گیری‌های اصلی بر اساس عملکرد پیش‌بینی و اعتبارسنجی مدل انجام می‌شود. از منظر چندهمخطی نیز مقادیر VIF برای ورودی‌ها پایین و در محدوده قابل‌قبول به‌دست آمد ( $\pi_1 = 1.739$ ،  $\pi_2 = 1.911$ ،  $\pi_3 = 1.131$ )، که نشان می‌دهد چندهمخطی شدید در بین ورودی‌ها وجود ندارد. بنابراین، از حیث وابستگی بین ورودی‌ها و چندهمخطی، مجموعه متغیرهای ورودی برای مدل‌سازی مناسب ارزیابی شد.

## ۳- نتایج و بحث

## ۳-۱- معماری شبکه

مجموعه داده ارائه‌شده شامل ۶۵ نقطه داده است که ورودی‌های  $\pi_1$ ،  $\pi_2$  و  $\pi_3$  و خروجی  $\pi_0$  را در بر می‌گیرد.

با توجه به داده‌های تجربی، جدول ۳ بیان‌گر دامنه تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌های مسئله حاضر تا ۴ رقم اعشار است.

به‌منظور ارزیابی وابستگی بین متغیرهای ورودی و اطمینان از عدم بروز چندهمخطی<sup>۱</sup> که می‌تواند باعث ناپایداری برآوردها یا ورود اطلاعات تکراری به مدل شود، همبستگی بین ورودی‌ها بررسی شد (جدول ۴). ابتدا ماتریس همبستگی پیرسون برای سنجش وابستگی خطی و همبستگی اسپیرمن برای سنجش وابستگی یکنواخت و مقاوم‌تر نسبت به عدم نرمالیت محاسبه گردید. همچنین برای ارزیابی چندهمخطی، شاخص عامل تورم واریانس<sup>۲</sup> برای هر ورودی گزارش شد. در این مطالعه،  $|r| \geq 0.80$  به‌عنوان همبستگی شدید و مقادیر  $VIF > 5$  (و به‌صورت سخت‌گیرانه‌تر  $VIF > 10$ ) به‌عنوان نشانه چندهمخطی قابل‌توجه در نظر گرفته شد. مطابق نتایج، بین برخی ورودی‌ها همبستگی در حد متوسط مشاهده می‌شود، در حالی‌که سایر جفت‌ها همبستگی ضعیف تا متوسط دارند. به‌طور کلی، الگوی همبستگی نشان می‌دهد که ورودی‌ها کاملاً مستقل از یکدیگر نیستند (که در مسائل واقعی رایج است)، اما در عین حال همپوشانی اطلاعاتی شدید که بتواند منجر به چندهمخطی حاد یا ناپایداری در برآوردها شود، مشاهده نمی‌شود. از منظر مدل‌سازی، وجود

<sup>۱</sup> Multicollinearity<sup>۲</sup> Variance Inflation Factor (VIF)

شبکه شامل ۱۲ لایه است، جایی که لایه اولیه از سه متغیر ورودی استاندارد شده ( $\pi_1$ ،  $\pi_2$  و  $\pi_3$ ) تشکیل شده است. هر لایه بعدی ویژگی‌های جدیدی تولید می‌کند که به عنوان توصیفات جزئی<sup>۴</sup> (PDS) شناخته می‌شوند، از طریق چندجمله‌ای‌های درجه دوم به صورت:

$$PD = c_0 + c_1 \cdot u + c_2 \cdot v + c_3 \cdot u^2 + c_4 \cdot v^2 + c_5 \cdot u \cdot v$$

که در آن  $u$  و  $v$  جفت‌های منتخب ویژگی‌ها از لایه‌های قبلی (یا ورودی‌های اصلی) هستند، و ضرایب  $c_0$  تا  $c_5$  از طریق رگرسیون کمترین مربعات روی داده‌های آموزشی تعیین می‌شوند. در هر لایه، چندجمله‌ای‌های کاندید بر اساس میانگین مربعات خطا (MSE) روی زیرمجموعه آزمون ارزیابی می‌شوند و سه مورد برتر برای گسترش مجموعه ویژگی‌ها حفظ می‌گردند که این امر ساختار پیچیده‌تری را برای بهبود دقت فراهم می‌آورد. این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که کاهش بیشتری در معیار انتخاب (MSE آزمون) مشاهده نشود. شبکه کامل شامل ۳۶ توصیف جزئی (PD) در سراسر ۱۲ لایه (سه مورد در هر لایه پس از لایه ورودی) است، اما معماری مؤثر برای پیش‌بینی نهایی تنها از زیرگراف وابستگی منتهی به گره خروجی بهینه استفاده می‌کند که شامل ۲۰ توصیف جزئی منحصربه‌فرد و مجموع ۱۲۰ پارامتر (شش مورد برای هر PD) می‌شود. این زیرگراف تضمین می‌کند که همه ورودی‌های اصلی، طبق الزام، از طریق وابستگی‌های بازگشتی گنجانده شوند. خروجی نهایی از توصیف جزئی در لایه آخر با کمترین MSE آزمون؛ یعنی، PD\_L12\_1، مشتق می‌شود که خروجی استاندارد شده  $\pi_0$  را به عنوان تابعی درجه دوم از PD\_L4\_2 و PD\_L11\_2 مدل‌سازی می‌کند، با ضرایب [۰/۰۰۱۳، ۰/۰۸۴۷، -۰/۰۸۴۵، ۰/۰۳۹، -۰/۲۹۴۱، ۰/۷۹۷۷].

دیگرام Mermaid برای درخت وابستگی شبکه GMDH تحقیق حاضر در شکل ۱ ارائه شده است. این نمایش، ساختار سلسله‌مراتبی را به تصویر می‌کشد، با خروجی  $\pi_{01}$  در بالا که از طریق توصیفات جزئی (PDS) به سمت پایین شاخه‌بندی می‌شود تا به متغیرهای ورودی  $\pi_1$ ،  $\pi_2$  و  $\pi_3$  در پایین برسد. هر گره، یک PD یا ورودی را نشان می‌دهد و لبه‌های جهت‌دار، وابستگی‌ها را بر اساس روابط چندجمله‌ای درجه دوم توصیف‌شده در تحلیل نشان

برای توسعه شبکه عصبی مصنوعی مبتنی بر GMDH، ابتدا داده‌ها با استفاده از مقیاس‌بندی میانگین صفر<sup>۱</sup> و واریانس واحد<sup>۲</sup> برای هر دو ورودی‌ها و خروجی استانداردسازی شدند تا عملکرد مدل بهبود یابد. سپس، مجموعه داده به زیرمجموعه‌های آموزش (تقریباً ۶۷٪، یا ۴۳ داده) و آزمون (تقریباً ۳۳٪، یا ۲۲ داده) تقسیم شد، با استفاده از تقسیم تصادفی و بذر ثابت<sup>۳</sup> برای تضمین تکرارپذیری. استانداردسازی مجموعه داده که همچنین به عنوان نرمال‌سازی z-score شناخته می‌شود، یک تکنیک پیش‌پردازش است که هر متغیر را به گونه‌ای تبدیل می‌کند که میانگین صفر و انحراف استاندارد یک داشته باشد. این فرآیند اطمینان حاصل می‌کند که ویژگی‌های با مقیاس‌های متفاوت به طور برابر در آموزش مدل مشارکت کنند و در نتیجه، عملکرد و پایداری الگوریتم را بهبود بخشد. برای مجموعه داده حاضر که شامل ۶۵ مشاهده است، استانداردسازی به طور مستقل روی ورودی‌ها و خروجی اعمال شد تا توزیع‌های فردی آن‌ها حفظ گردد.

مدل GMDH برای ساخت شبکه عصبی چندجمله‌ای پیاده‌سازی شد، با تمرکز بر چندجمله‌ای‌های درجه دوم در هر لایه. جفت‌های متغیرها برای تشکیل چندجمله‌ای‌های کاندید ترکیب شدند، روی مجموعه آموزش برازش گردیدند و بر اساس حداقل میانگین مربعات خطا روی مجموعه آزمون انتخاب شدند. برای اولویت‌دهی به دقت نسبت به سادگی، تا سه چندجمله‌ای برتر در هر لایه حفظ شدند و اجازه داده شد تا شبکه تا زمانی که بهبود بیشتری در خطای انتخاب مشاهده نشود، تکامل یابد. این رویکرد منجر به شبکه‌ای با ۱۲ لایه و مجموع ۱۲۰ پارامتر شد که همه سه ورودی ( $\pi_1$ ،  $\pi_2$  و  $\pi_3$ ) را در بر می‌گیرد. پیاده‌سازی با استفاده از کد پایتون انجام گردید. پیش‌بینی‌های مدل، الزامات را برآورده می‌کنند که خطا (اندازه‌گیری‌شده به صورت میانگین درصد خطای مطلق) کمتر از ۷٪ در سراسر مجموعه‌های داده باشد.

معماری شبکه GMDH توسعه‌یافته برای مجموعه داده، یک شبکه عصبی چندجمله‌ای پیش‌خور چندلایه است که برای اولویت‌دهی به دقت پیش‌بینی طراحی شده است.

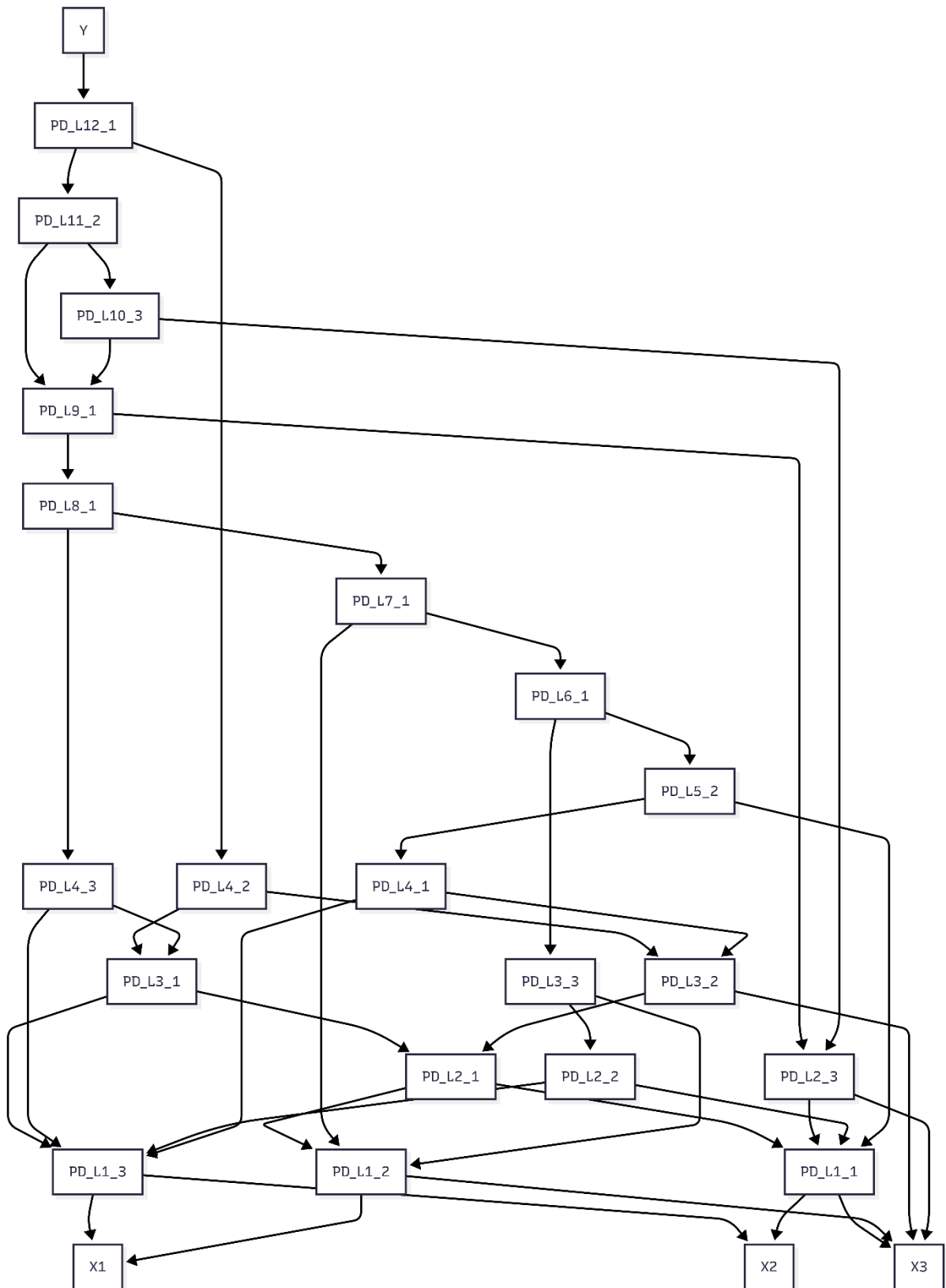
<sup>1</sup> Mean-zero scaling

<sup>2</sup> Unit-variance scaling

<sup>3</sup> Fixed seed

<sup>4</sup> Partial descriptions

می‌دهند. ضرایب به طور صریح در نمودار برچسب‌گذاری نشده‌اند تا وضوح حفظ شود.



شکل ۱. نمودار Mermaid برای درخت وابستگی شبکه GMDH در مطالعه حاضر.

**Figure 1.** The Mermaid diagram for the dependency tree of the GMDH network in the present study.

## ۳-۲- ارزیابی عملکرد شبکه

عملکرد مدل GMDH با استفاده از مجموعه‌ای جامع از معیارها در سراسر مجموعه داده‌ها، و همچنین به طور جداگانه برای زیرمجموعه‌های آموزش و آزمون ارزیابی گردید. این معیارها بینش‌هایی در مورد دقت مدل، قابلیت پیش‌بینی، و پتانسیل بیش‌برازش ارائه می‌دهند. در ادامه، تحلیل ساختاریافته‌ای ارائه شده است که با توضیحات مختصری از هر معیار آغاز می‌شود و سپس تفسیر مقادیر به‌دست‌آمده دنبال می‌گردد.

(۱) خطای جذر میانگین مربعات (RMSE): جذر میانگین مربعات تفاوت‌های بین مقادیر پیش‌بینی‌شده و واقعی را اندازه‌گیری می‌کند و خطای پیش‌بینی مدل را در واحدهای متغیر خروجی نشان می‌دهد. مقادیر پایین‌تر نشان‌دهنده عملکرد بهتر است.

(۲) خطای مطلق میانگین (MAE): میانگین تفاوت‌های مطلق بین مقادیر پیش‌بینی‌شده و واقعی را نشان می‌دهد و ارزیابی ساده‌ای از بزرگی خطا ارائه می‌کند. مقادیر پایین‌تر ترجیح داده می‌شود.

(۳) خطای مربعات میانگین (MSE): میانگین مربعات خطاها را محاسبه می‌کند و بر انحرافات بزرگ‌تر تأکید دارد. این معیار نسبت به نقاط پرت حساس است و مقادیر پایین‌تر نشان‌دهنده برآزش برتر است.

(۴) میانگین درصد خطای مطلق (MAPE): میانگین خطای مطلق را به صورت درصدی از مقادیر واقعی بیان می‌کند و تفسیر خطای نسبی را تسهیل می‌نماید. مدل الزام مشخص‌شده کمتر از ۷٪ را برآورده می‌کند.

(۵) ضریب تعیین ( $R^2$ ): نسبت واریانس در خروجی که توسط مدل توضیح داده می‌شود را کمی می‌کند و در بازه ۰ تا ۱ قرار دارد. مقادیر نزدیک‌تر به ۱ نشان‌دهنده قدرت توضیحی قوی‌تر است.

(۶) ضریب همبستگی (R): رابطه خطی بین مقادیر پیش‌بینی‌شده و واقعی را ارزیابی می‌کند و

مقادیر نزدیک به ۱ نشان‌دهنده همبستگی مثبت بالا است.

(۷) شاخص ویلموت (WI): توافق مدل با داده‌های مشاهده‌شده را ارزیابی می‌کند و خطاهای سیستماتیک و غیرسیستماتیک را در نظر می‌گیرد. مقادیر نزدیک به ۱ نشان‌دهنده توافق عالی است.

(۸) ضریب جرم باقی‌مانده (CRM): نشان‌دهنده سوگیری (بایاس) در پیش‌بینی‌ها است؛ مقادیر نزدیک به ۰ نشان‌دهنده حداقل پیش‌بینی بیش از حد یا کمتر از حد سیستماتیک است (مثبت برای پیش‌بینی کمتر از حد یا کم‌تخمینی، منفی برای پیش‌بینی بیش از حد یا بیش‌تخمینی).

(۹) معیار اطلاعات آکائیکه (AIC): تعادل بین برآزش مدل و پیچیدگی را برقرار می‌کند و پارامترهای بیش از حد را جریمه می‌نماید. مقادیر پایین‌تر نشان‌دهنده تعادل بهتر بین دقت و سادگی است.

به‌طورکلی، نزدیکی شاخص‌های R و WI به عدد یک، نشان‌دهنده سطح همبستگی بالای مدل GMDH با داده‌های آزمایشگاهی است. مقادیر پایین شاخص‌های RMSE، MAPE و CRM بیانگر بالاترین سطح دقت مدل GMDH است. لازم به ذکر است که پیچیدگی مدل GMDH با استفاده از این شاخص‌ها ارزیابی نمی‌شود. برای رفع این محدودیت، معیار اطلاعات آکائیکه (AIC) در این مطالعه معرفی شد؛ به این معنی که مدل GMDH با کمترین پیچیدگی، کمترین مقدار AIC را دارد. با توجه به توضیحات ارائه‌شده، بهترین مدل GMDH مدلی است که کمترین درجه از شاخص AIC و خطا (RMSE، MAPE و CRM) را همراه با بالاترین سطح همبستگی (R و WI) داشته باشد. معیارهای عملکرد مدل در جدول ۵ ارائه شده است.

در سراسر مجموعه داده، مدل عملکرد قوی‌ای با RMSE برابر با ۰/۸۸۴، MAE برابر با ۰/۷۱۱، و MSE برابر با ۰/۷۸۲ نشان می‌دهد. این مقادیر همگی نشان‌دهنده خطاهای حداقل در هر دو جنبه مطلق و مربعی هستند. MAPE برابر با ۶/۶۷۳٪ است که انطباق با آستانه مشخص‌شده را تأیید می‌کند و دقت مدل را در جنبه‌های

داده‌ها، می‌تواند تغییرات ظریف را در صورت لزوم برطرف کند.

#### جدول ۵. عملکرد مدل پیشنهادی

Table 5. The performance of the suggested model

معیار	کل مجموعه داده	مجموعه آموزش	مجموعه آزمون
RMSE	۰/۸۸۴	۰/۸۶۷	۰/۹۱۷
MAE	۰/۷۱۱	۰/۷۰۳	۰/۷۲۸
MSE	۰/۷۸۲	۰/۷۵۲	۰/۸۴۰
MAPE (%)	۶/۶۷۳	۶/۵۷۲	۶/۸۷۲
R <sup>2</sup>	۰/۹۸۹	۰/۹۸۸	۰/۹۹۰
R	۰/۹۹۴	۰/۹۹۴	۰/۹۹۶
WI	۰/۹۹۷	۰/۹۹۷	۰/۹۹۷
CRM	-۰/۰۰۲	۰/۰	-۰/۰۰۷
AIC	۲۲۴/۰	۲۲۷/۷	۲۳۶/۲
Median  e	۰/۵۶۵	۰/۵۵۸	۰/۶۱۲
IQR  e	۰/۷۳۱	۰/۷۹۶	۰/۵۳۳

جدول ۶، مقادیر واقعی و پیش‌بینی‌شده خروجی را برای هر نقطه داده در مجموعه داده را به همراه درصد خطای نسبی ارائه می‌دهد. ستون مجموعه داده نشان‌دهنده آن است که آیا هر ردیف به زیرمجموعه آموزش یا آزمون تعلق دارد. ردیف‌ها با ترتیب اصلی در مجموعه داده ارائه‌شده مطابقت دارند (ردیف ۱ مربوط به اولین ورودی داده است، و به همین ترتیب). لازم به توضیح است که در این جدول مقادیر خطا با یک رقم اعشار نشان داده شده است. تفکیک انجام گرفته در جدول ۶، ارزیابی دقت نقطه‌به‌نقطه مدل، شناسایی ناهمخوانی‌ها، و ارزیابی عملکرد تعمیم‌پذیری را امکان‌پذیر می‌سازد. به طور کلی، خطاهای نسبی در سراسر مجموعه داده کامل، میانگینی برابر با ۶/۶۷۳٪ نشان می‌دهند، با انحراف معیار ۵/۸۷۵٪ که حاکی از تغییرپذیری متوسط در دقت پیش‌بینی است. حداقل خطا برابر با ۰/۰۰۵٪ ناچیز است که در ردیف ۴۸ (آموزش) مشاهده می‌شود، در حالی که حداکثر به ۲۳/۳٪ در ردیف ۱۹ (آموزش) می‌رسد و مواردی را برجسته می‌سازد که مدل به طور قابل توجهی از مقادیر واقعی انحراف دارد. این آمارهای تجمیعی با میانگین درصد خطای مطلق (MAPE) گزارش‌شده قبلی حدود ۶/۶۷۳٪ همخوانی دارد و پایبندی کلی مدل به آستانه مشخص‌شده کمتر از ۷٪ خطای میانگین را تأیید می‌کند.

نسبی برجسته می‌سازد. علاوه بر این، مقدار بالای R<sup>2</sup> برابر با ۰/۹۸۹ نشان می‌دهد که مدل تقریباً تمام واریانس داده‌ها را توضیح می‌دهد که با R (۰/۹۹۴) و WI (۰/۹۹۷) تکمیل می‌شود و همبستگی قوی و همخوانی عالی با مقادیر مشاهده‌شده را تأکید می‌کند. CRM برابر با ۰/۰۰۲- نشان‌دهنده سوگیری ناچیز است و حاکی از آن است که پیش‌بینی‌ها نه به طور سیستماتیک بیش‌تخمینی و نه کم‌تخمینی خروجی را انجام می‌دهند. AIC برابر با ۲۲۴/۰ همچنین تعادل منطقی بین دقت و پیچیدگی مدل را پشتیبانی می‌کند که شامل ۱۲۰ پارامتر در ۱۲ لایه است.

هنگام مقایسه زیرمجموعه‌های آموزش و آزمون، ثبات مدل آشکار می‌شود و قابلیت تعمیم‌پذیری آن را تأیید می‌کند. در مجموعه آموزش، شامل ۴۳ نقطه داده، معیارها نتایج کمی برتر نشان می‌دهند، از جمله RMSE برابر با ۰/۸۶۷، MAE برابر با ۰/۷۰۳، MSE برابر با ۰/۷۵۲، و MAPE برابر با ۶/۵۷۲٪. این‌ها با R<sup>2</sup> برابر با ۰/۹۸۸، R برابر با ۰/۹۹۴، و WI برابر با ۰/۹۹۷ همراه هستند، با CRM برابر با ۰/۰۰۰- که نشان‌دهنده عدم سوگیری مطلق است و AIC برابر با ۲۲۷/۷. در مقابل، مجموعه آزمون با ۲۲ نقطه، RMSE برابر با ۰/۹۱۷، MAE برابر با ۰/۷۲۸، MSE برابر با ۰/۸۴۰، و MAPE برابر با ۶/۸۷۲٪ را به همراه دارد که هرچند کمی بالاتر، اما همچنان تحسین‌برانگیز پایین است. قابل توجه است که R<sup>2</sup> (۰/۹۹۰)، R (۰/۹۹۶)، و WI (۰/۹۹۷) در مجموعه آزمون مشابه یا حتی کمی بهبودیافته هستند و نشان‌دهنده ضبط مؤثر الگوهای زیرین بدون بیش‌برازش است. CRM برابر با -۰/۰۰۷- تمایل به بیش‌تخمینی جزئی را آشکار می‌کند، هرچند که نگرانی ناچیزی است، و AIC برابر با ۲۳۶/۲ اندازه کوچکتر زیرمجموعه را در نظر می‌گیرد. در نتیجه، معیارهای مدل GMDH به طور جمعی دقت پیش‌بینی بالا و قابلیت اعتماد آن را در ارتباط ورودی‌های  $\pi_1$ ،  $\pi_2$  و  $\pi_3$  با خروجی  $\pi_0$  تأیید می‌کنند. اختلافات محدود بین عملکرد آموزش و آزمون، عدم بیش‌برازش را تقویت می‌کند و تأکید بر دقت از طریق ساختار شبکه پیچیده‌تر را توجیه می‌نماید. این تحلیل، مناسب بودن مدل برای مجموعه داده را پشتیبانی می‌کند، در حالی که پیشنهاد می‌دهد بهبودهای بیشتر، مانند تنظیم هایپرپارامترها یا گسترش

## ادامه جدول ۶.

Table 6 continued.

مجموعه	خطا نسبی (%)	خروجی		آزمایش
		پیش بینی	تجربی	
آزمون	۸/۹	۱۹/۸۳	۲۱/۷۷	۳۵
آموزش	۳/۴	۱۶/۸۹	۱۷/۴۹	۳۶
آموزش	۳/۲	۱۳/۶۷	۱۴/۱۲	۳۷
آموزش	۱۲/۴	۱۲/۱۱	۱۳/۸۲	۳۸
آموزش	۱۱/۴	۱۱/۰۷	۱۲/۵۰	۳۹
آموزش	۱۲/۴	۹/۹۷	۱۱/۳۹	۴۰
آزمون	۵/۶	۸/۸۱	۹/۳۴	۴۱
آزمون	۱۰/۶	۷/۶۱	۸/۵۱	۴۲
آموزش	۹/۵	۶/۳۸	۷/۰۵	۴۳
آموزش	۳/۲	۵/۱۸	۵/۳۵	۴۴
آموزش	۱/۶	۳۵/۰۲	۳۵/۶۰	۴۵
آزمون	۱/۹	۳۳/۱۹	۳۳/۸۵	۴۶
آموزش	۰/۷	۳۱/۲۷	۳۱/۰۶	۴۷
آموزش	۰/۰	۲۸/۹۷	۲۸/۹۷	۴۸
آموزش	۰/۵	۲۶/۹۵	۲۶/۸۱	۴۹
آموزش	۶/۸	۲۲/۶۱	۲۴/۲۶	۵۰
آموزش	۸/۸	۱۱/۴۵	۱۲/۵۵	۵۱
آموزش	۹/۰	۱۰/۹۱	۱۱/۹۹	۵۲
آموزش	۱۲/۱	۱۰/۴۱	۱۱/۸۴	۵۳
آزمون	۱۲/۴	۹/۸۴	۱۱/۲۴	۵۴
آموزش	۰/۴	۹/۰۷	۹/۱۰	۵۵
آموزش	۶/۲	۸/۴۹	۹/۰۵	۵۶
آموزش	۲/۶	۷/۷۰	۷/۹۰	۵۷
آموزش	۵/۸	۷/۷۵	۸/۲۳	۵۸
آموزش	۵/۷	۷/۵۱	۷/۹۷	۵۹
آموزش	۳/۵	۷/۰۹	۷/۳۵	۶۰
آزمون	۰/۷	۶/۸۰	۶/۷۶	۶۱
آزمون	۱/۲	۶/۵۵	۶/۴۷	۶۲
آموزش	۳/۸	۶/۲۸	۶/۰۴	۶۳
آزمون	۱۷/۷	۵/۹۱	۵/۰۲	۶۴
آزمون	۱۴/۸	۵/۶۳	۴/۹۰	۶۵

هنگام تقسیم بندی بر اساس مجموعه داده، زیرمجموعه آموزش میانگین خطای نسبی ۶/۵۷۲٪ را نشان می دهد، با انحراف معیار ۵/۴۱۳، حداکثر ۲۳/۳٪ (ردیف ۱۹)، و حداقل ۰/۰۰۵٪ (ردیف ۴۸). در مقایسه، زیرمجموعه آزمون میانگین خطای کمی بالاتر ۶/۸۷۲٪ را با انحراف معیار ۶/۸۲۱٪، حداکثر ۲۱/۹٪ (ردیف ۹)،

با این حال، وجود خطاهای فردی بالاتر، چالش های موضعی را پیشنهاد می دهد که ممکن است ناشی از ناهمگونی داده ها یا تعاملات پیچیده بین ورودی ها باشد.

## جدول ۶. نتایج مدل GMDH

Table 6. The results of GMDH model

مجموعه	خطا نسبی (%)	خروجی		آزمایش
		پیش بینی	تجربی	
آزمون	۴/۹	۱۵/۲۲	۱۶/۰۰	۱
آموزش	۴/۰	۱۷/۰۸	۱۷/۸۰	۲
آموزش	۳/۱	۲۰/۴۲	۱۹/۸۰	۳
آزمون	۲/۲	۲۳/۷۳	۲۳/۲۳	۴
آموزش	۱/۵	۲۶/۳۹	۲۶/۰۰	۵
آزمون	۱/۹	۲۸/۴۶	۲۹/۰۳	۶
آزمون	۱/۷	۶/۰۵	۵/۹۵	۷
آموزش	۲۱/۹	۸/۷۸	۷/۲۰	۸
آزمون	۲۱/۹	۱۱/۴۰	۹/۳۵	۹
آزمون	۹/۰	۱۲/۶۰	۱۱/۵۶	۱۰
آموزش	۱۰/۲	۱۳/۶۶	۱۲/۴۰	۱۱
آموزش	۲/۲	۱۴/۵۷	۱۴/۲۶	۱۲
آزمون	۰/۷	۸/۱۴	۸/۲۰	۱۳
آزمون	۲/۹	۱۱/۸۴	۱۱/۵۰	۱۴
آموزش	۸/۶	۱۵/۶۴	۱۴/۴۰	۱۵
آموزش	۱۰/۰	۲۰/۸۹	۱۹/۰۰	۱۶
آموزش	۲/۰	۲۲/۴۳	۲۲/۰۰	۱۷
آزمون	۲/۱	۲۲/۹۰	۲۳/۴۰	۱۸
آموزش	۲۳/۴	۵/۴۹	۴/۴۵	۱۹
آموزش	۱۲/۵	۷/۹۹	۷/۱۰	۲۰
آموزش	۱۲/۷	۹/۶۴	۸/۵۵	۲۱
آموزش	۵/۰	۱۰/۶۷	۱۰/۱۶	۲۲
آموزش	۷/۳	۱۳/۰۴	۱۲/۱۶	۲۳
آموزش	۱/۸	۱۵/۱۶	۱۴/۹۰	۲۴
آموزش	۰/۰	۲/۸۳	۲/۸۳	۲۵
آزمون	۲۱/۴	۳/۷۶	۳/۱۰	۲۶
آموزش	۱۰/۵	۵/۶۳	۵/۱۰	۲۷
آموزش	۱۰/۵	۶/۸۶	۶/۲۱	۲۸
آموزش	۷/۲	۸/۰۱	۷/۴۷	۲۹
آموزش	۵/۲	۹/۰۸	۸/۶۳	۳۰
آزمون	۵/۴	۲۷/۳۱	۲۸/۸۶	۳۱
آموزش	۱/۵	۲۶/۴۱	۲۶/۰۱	۳۲
آموزش	۰/۵	۲۴/۲۹	۲۴/۴۱	۳۳
آزمون	۱/۲	۲۲/۱۹	۲۲/۴۷	۳۴

و حداقل ۰/۶۸۹٪ (ردیف ۶۱) به نمایش می‌گذارد. افزایش نسبتاً کم در میانگین و تغییرپذیری روی داده‌های آزمون مورد انتظار است، زیرا عملکرد مدل روی مشاهدات نادیده را بازتاب می‌دهد، اما تفاوت‌ها آن قدر قابل توجه نیستند که نشان‌دهنده بیش‌برازش باشند. این ثبات، استحکام مدل را پشتیبانی می‌کند، با هر دو زیرمجموعه که میانگین خطاها را زیر معیار ۰/۷٪ حفظ می‌کنند. بررسی دقیق‌تر نقاط پرت که در اینجا به عنوان نقاطی با خطاهای نسبی بیش از ۰/۷٪ تعریف شده‌اند، الگوهایی را آشکار می‌کند که شایسته توجه است. در زیرمجموعه آموزش، ۱۶ مورد چنین رخدادی وجود دارد (تقریباً ۰/۳۷٪ از نقاط آموزش)، شامل موارد قابل توجهی مانند ردیف ۱۹ (۰/۲۳/۳)، ردیف ۸ (۰/۲۱/۸)، و ردیف ۲۱ (۰/۱۲/۷). این خطاهای بالا عمدتاً در مقادیر خروجی کمتر از ۱۵ ظاهر می‌شوند و پیشنهاددهنده عملکرد ضعیف احتمالی در نواحی فضای داده با خروجی‌های کوچکتر است که ممکن است ناشی از نویز، تعداد داده ناکافی، یا پیچیدگی‌های غیرخطی باشد که به طور کامل توسط چندجمله‌ای‌های GMDH ضبط نشده‌اند. در زیرمجموعه آزمون، ۸ نقطه پرت شناسایی شده است (تقریباً ۰/۳۶٪ از نقاط آزمون)، مثل ردیف ۹ (۰/۲۱/۹)، ردیف ۲۶ (۰/۲۱/۳)، و ردیف ۶۴ (۰/۱۷/۶) که دوباره در اطراف مقادیر خروجی پایین‌تر تجمع یافته‌اند. نسبت مشابه نقاط پرت در هر دو زیرمجموعه، حاکی از آن است که این مسائل ذاتی داده‌ها یا ساختار مدل هستند نه مصنوعات تقسیم‌بندی.

توزیع خطاها همچنین تمایل مدل به بیش‌تخمینی خروجی در بسیاری از موارد خطای بالا را تأکید می‌کند، همان‌طور که توسط مقادیر پیش‌بینی‌شده بیش از واقعی‌ها مشهود است (مانند ردیف‌های ۸، ۹، ۱۹، ۲۶). این سوگیری بیش‌تخمینی، هرچند کلی جزئی (طبق ضریب جرم باقی‌مانده نزدیک به صفر قبلی)، در زیرمجموعه‌های خاص برجسته می‌شود و ممکن است مرتبط با حساسیت معکوس  $\pi_3$  شناسایی‌شده در تحلیل‌های قبلی باشد. چنین مشاهداتی، تشخیص‌های هدفمند مانند نمودارهای باقی‌مانده یا همبستگی‌های ورودی برای این نقاط را توصیه می‌کند تا مدل را بیشتر پالایش نماید. در حالت کلی جدول ۶، جدول قابلیت پیش‌بینی رضایت‌بخش مدل GMDH را تأیید می‌کند، با

میانگین خطاهای نسبی که به خوبی در محدوده‌های قابل قبول برای هر دو مجموعه داده آموزش و آزمون قرار دارد. با این حال، وجود نقاط پرت، به ویژه در دامنه‌های خروجی پایین‌تر، فرصت‌های بهبود را برجسته می‌سازد، مانند افزودن لایه‌های اضافی، درجه‌های چندجمله‌ای جایگزین، یا افزایش داده‌ها در نواحی کم‌نماینده<sup>۱</sup>. این تحلیل نقطه‌به‌نقطه<sup>۲</sup>، معیارهای کلی را تکمیل می‌کند و دیدگاهی موشکافانه<sup>۳</sup> از عملکرد ارائه می‌دهد که می‌تواند تحقیقات یا کاربردهای بعدی را راهنمایی کند.

نمودار پراکندگی ارائه‌شده در شکل ۲، رابطه بین مقادیر پیش‌بینی‌شده و واقعی  $\pi_0$  را نشان می‌دهد که از مدل GMDH اعمال‌شده بر مجموعه داده ارائه‌شده استخراج گردیده است. محور افقی مقادیر واقعی  $\pi_0$  را نشان می‌دهد، در حالی که محور عمودی مقادیر پیش‌بینی‌شده  $\pi_0$  را مشخص می‌کند. نقاط داده از زیرمجموعه آموزش به رنگ آبی نمایش داده شده‌اند و نقاط داده از زیرمجموعه آزمون به رنگ قرمز. یک خط نقطه‌چین قرمز، سناریوی ایده‌آل پیش‌بینی کامل را نشان می‌دهد، جایی که مقادیر پیش‌بینی‌شده دقیقاً با مقادیر واقعی همخوانی دارند. این نمایش بصری، ارزیابی دقت مدل را تسهیل می‌کند و هرگونه انحرافات یا الگوها در پیش‌بینی‌ها را در سراسر هر دو زیرمجموعه برجسته می‌سازد. شکل ارائه‌شده دو نمودار پراکندگی را نشان می‌دهد که عملکرد مدل GMDH را در پیش‌بینی متغیر خروجی  $\pi_0$ ، بر اساس جدول مقادیر واقعی و پیش‌بینی‌شده ارائه‌شده، به تصویر می‌کشد. نمودار بالا دامنه کامل داده‌ها را نمایش می‌دهد، در حالی که نمودار پایین نمای بزرگ‌نمایی‌شده‌ای برای مقادیر پایین‌تر ارائه می‌کند و بررسی دقیق دقت مدل در مقیاس‌های متفاوت را تسهیل می‌نماید. هر دو نمودار بین مجموعه داده آموزش (نقاط قرمز) و مجموعه داده آزمون (نقاط آبی) تمایز قائل می‌شوند، با خطوط مرجع برای پیش‌بینی کامل ( $Y = X$ )، خط نقطه‌چین سیاه و مرز خطای ۰/۷٪ (خط پیوسته سیاه).

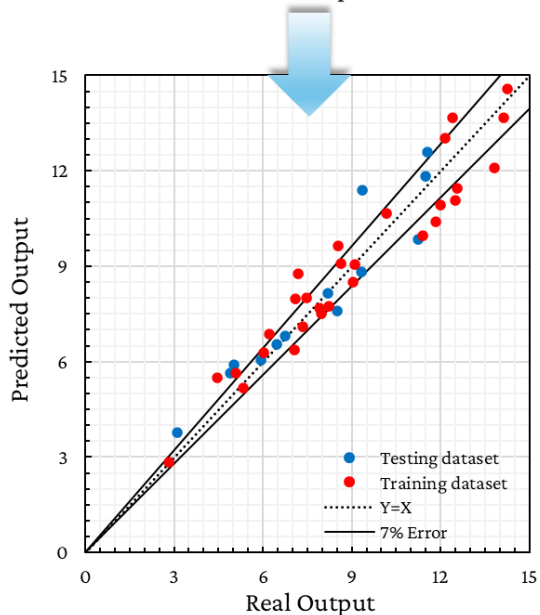
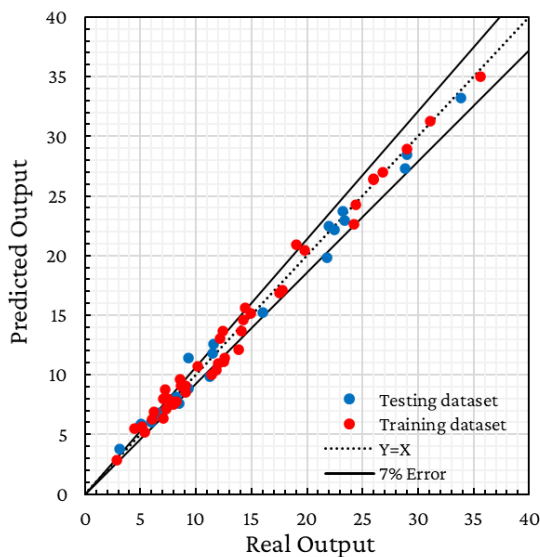
نمودار بالایی در شکل ۲ مقادیر واقعی  $\pi_0$  تقریباً از ۰ تا ۴۰ گسترش یافته‌اند، با مقادیر پیش‌بینی‌شده  $\pi_0$  که برای اکثریت نقاط نزدیک به خط  $Y = X$  همخوانی دارند. این

<sup>1</sup> Underrepresented region

<sup>2</sup> Point-wise analysis

<sup>3</sup> Nuanced view

پرداختن به نویز یا غیرخطی بودن در نواحی با بزرگی پایین. این تحلیل بصری، معیارهای کمی را تکمیل می‌کند و مناسب بودن مدل برای تأیید می‌نماید.



شکل ۲. ترسیم داده‌های پیش‌بینی بر حسب واقعی.

Figure 2. Plotting prediction data versus actual.

### ۳-۳- تحلیل حساسیت

#### ۳-۳-۱- تحلیل حساسیت ذاتی

در این بخش ابتدا نتایج تحلیل حساسیت ذاتی آورده شده است. همان‌طور که پیشتر بیان شد، تحلیل حساسیت ذاتی انجام شده در فرآیند ساخت مدل روش GMDH بر ارزیابی اهمیت متغیرها با تحلیل درخت وابستگی ساختار شبکه نهایی متمرکز است. این روش از مکانیسم خودسازمان‌ده GMDH بهره می‌برد که در آن متغیرهای

امر نشان‌دهنده برآزش کلی قوی مدل است، زیرا بیشتر پیش‌بینی‌ها نزدیک به خط توافق کامل قرار می‌گیرند که با مقادیر بالای ضریب تعیین ( $R^2$ ) ۰/۹۸۸ برای آموزش و ۰/۹۹۰ (برای آزمون) گزارش‌شده قبلی همخوانی دارد. نقاط آموزش و آزمون بدون جداسازی سیستماتیک با یکدیگر مخلوط شده‌اند و پیشنهاددهنده تعمیم‌پذیری خوب و بیش‌برآزش حداقل است. با این حال، برخی انحرافات در مقادیر  $\pi_0$  بالاتر (بالای ۳۰) قابل مشاهده است، جایی که چند نقطه کم‌تخمینی نشان می‌دهند، هرچند که درون یا نزدیک مرزهای خطای ۷٪ باقی می‌مانند. خط خطای ۷٪ به عنوان معیار مفیدی عمل می‌کند که تقریباً تمام نقاط داده را در بر می‌گیرد و با میانگین درصد خطای مطلق (MAPE) برابر با ۶/۶۷۳٪ در سراسر مجموعه داده همخوانی دارد که به خوبی زیر آستانه مشخص شده ۷٪ است.

نمودار پایینی در شکل ۲ روی مقادیر واقعی  $\pi_0$  از ۰ تا ۱۵ بزرگ‌نمایی کرده و رفتار مدل را در دامنه پایین‌تر برجسته می‌سازد، جایی که خطاهای نسبی معمولاً به دلیل بزرگی‌های کوچک‌تر برجسته‌تر هستند. در اینجا، نقاط پراکندگی بیشتری نسبت به خط  $Y = X$  نشان می‌دهند، با چندین مورد بیش‌تخمینی (پیش‌بینی شده  $\pi_0 < \pi_0$  واقعی) برای هر دو مجموعه آموزش و آزمون. این امر با خطاهای نسبی جدول همخوانی دارد، جایی که درصدهای بالاتر (مانند بیش از ۲۰٪ در ردیف‌های ۸، ۹، ۱۹ و ۲۶) عمدتاً در  $\pi_0 < ۱۵$  رخ می‌دهند. با وجود این تغییرپذیری، اکثریت نقاط درون محدوده خطای ۷٪ باقی می‌مانند و نشان‌دهنده آن است که خطاهای مطلق حتی اگر خطاهای نسبی بالا باشند، پایین باقی می‌مانند. عدم وجود سوگیری قوی به سمت بیش یا کم‌تخمینی در این دامنه، استحکام مدل را بیشتر پشتیبانی می‌کند، همان‌طور که توسط مقادیر نزدیک به صفر ضریب جرم باقی‌مانده (CRM) مشهود است. به طور کلی، شکل قابلیت ضبط مؤثر الگوهای زیرین داده‌ها توسط مدل GMDH را نشان می‌دهد، با عملکرد برتر در مقادیر  $\pi_0$  بالاتر و دقت قابل قبول در مقادیر پایین‌تر. پایداری نزدیک به خط پیش‌بینی کامل در سراسر زیرمجموعه‌ها، قابلیت اعتماد مدل را برای کاربردهای عملی تقویت می‌کند، در حالی که نمای بزرگ‌نمایی‌شده نواحی برای پالایش بالقوه را برجسته می‌سازد، مانند

به طور خاص، این تحلیل پاسخگویی مدل را با کمی‌سازی تغییرات متناسب در خروجی پیش‌بینی‌شده  $\pi_0$  پس از اختلالات کوچک (افزایش‌های ۱ درصدی) به هر متغیر ورودی ( $\pi_1, \pi_2$  و  $\pi_3$ ) در سراسر مجموعه داده کامل ارزیابی می‌کند، در حالی که سایر ورودی‌ها ثابت نگه داشته می‌شوند. این رویکرد، با استفاده از معیارهای کشسانی، روی مدل کاملاً ساخته‌شده و آموزش‌دیده GMDH اعمال می‌شود تا رفتار آن تفسیر گردد و تأثیر نسبی ورودی‌ها بر پیش‌بینی‌ها پس از توسعه شبکه شناسایی شود. این روش بخشی از انتخاب متغیر یا ارزیابی اهمیت در مرحله ساخت مدل نیست، جایی که GMDH به طور ذاتی از ساخت بازگشتی چندجمله‌ای و کمینه‌سازی خطا برای ترکیب و حفظ ویژگی‌ها بهره می‌گیرد. نتایج تحلیل حساسیت برای مدل GMDH در جدول ۷ خلاصه شده است. این جدول میانگین کشسانی<sup>۴</sup> و میانگین کشسانی مطلق<sup>۵</sup> را برای هر متغیر ورودی ( $\pi_1, \pi_2$  و  $\pi_3$ ) ارائه می‌دهد که بر اساس ۶۵ نقطه داده محاسبه شده است. کشسانی درصد تغییر در خروجی پیش‌بینی‌شده  $\pi_0$  را که ناشی از افزایش ۱٪ در ورودی مربوطه است، در حالی که سایر متغیرها ثابت نگه داشته می‌شوند، اندازه‌گیری می‌کند. میانگین کشسانی مطلق بزرگی پاسخ را، بدون توجه به جهت، منعکس می‌کند.

**جدول ۷.** نتایج تحلیل حساسیت مبتنی بر الاستیسیته

**Table 7.** The results of elasticity-based sensitivity analysis

ورودی	میانگین کشسانی	میانگین کشسانی مطلق
$\pi_1$	۰/۰۴۴۶	۰/۳۴۱۸
$\pi_2$	۰/۴۹۳۷	۰/۵۳۲۰
$\pi_3$	-۱/۰۴۴۲	۱/۰۷۸۱

نتایج تحلیل حساسیت محلی (ارزیابی حساسیت خروجی پس از آموزش) به شرح زیر است:

(۱) برای  $\pi_1$ ، میانگین کشسانی برابر با ۰/۰۴۴۶ تعیین شده است که نشان‌دهنده رابطه مثبت نسبتاً ضعیف است؛ جایی که به طور متوسط، افزایش ۱٪ در  $\pi_1$  منجر به افزایش ۰/۰۴۴۶٪ در  $\pi_0$  می‌شود. این پاسخ حاکی از آن است که  $\pi_1$  تأثیر نسبتاً کمی بر  $\pi_0$

ورودی به صورت تکراری در توصیف‌های جزئی درجه دوم (PDS) بر اساس توانایی آن‌ها در کاهش خطای پیش‌بینی ترکیب می‌شوند. اهمیت متغیر از طریق شمارش تعداد مسیرهای منحصربه‌فرد از گره خروجی  $\pi_0$  به هر متغیر ورودی ( $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ ) در نمایش گراف غیرمدور جهت‌دار شبکه، کمی می‌شود. مسیرها با استفاده از تکنیک‌های پیمایش گراف<sup>۱</sup> مانند جستجوی عمق‌اول<sup>۲</sup> شمارش می‌شوند تا فراوانی و میزان مشارکت هر متغیر را در طول ۱۲ لایه ثبت کنند و نقش آن‌ها را در چندجمله‌ای‌های منتخبی که میانگین مربعات خطا را در زیرمجموعه آزمایشی کمینه می‌کنند، برجسته سازند.

در مطالعه حاضر، تحلیل حساسیت ذاتی به تعداد مسیرهای ۱۹ برای  $\pi_1$ ، ۲۲ برای  $\pi_2$  و ۲۹ برای  $\pi_3$ ، با مجموع ۷۰ مسیر در گراف وابستگی دست یافت. نرمال‌سازی این شمارش‌ها، اهمیت نسبی تقریبی ۰/۲۷۱ برای  $\pi_1$ ، ۰/۳۱۴ برای  $\pi_2$  و ۰/۴۱۴ برای  $\pi_3$  را ارائه می‌دهد. این مقادیر نشان می‌دهند که  $\pi_3$  تأثیرگذارترین متغیر است و از طریق وابستگی‌های بازگشتی، سهم بیشتری در ساختار مدل دارد، پس از آن  $\pi_2$  و سپس  $\pi_1$  قرار دارند. شمارش بالاتر مسیر برای  $\pi_3$ ، نقش حیاتی آن را در کاهش خطا در طول ساخت تکراری مدل تأیید می‌کند که با تأکید مدل بر دقت هم‌سو است. این رویکرد ذاتی، بینشی از پویایی‌های درونی مدل ارائه می‌دهد و سلسله‌مراتبی از مشارکت متغیرها را آشکار می‌سازد که می‌تواند اولویت‌دهی به ویژگی‌ها را در اصلاحات آینده راهنمایی کند. با تأکید بر متغیرهای دارای قدرت پیش‌بینی قوی‌تر، مانند  $\pi_3$ ، این تحلیل از راهبردهای هدفمند جمع‌آوری داده یا پیش‌پردازش پشتیبانی می‌کند و موجب افزایش استحکام و قابلیت تفسیر مدل برای کاربردهای عملی می‌شود.

### ۳-۳-۲- تحلیل حساسیت محلی

در ادامه، تحلیل حساسیت مبتنی بر الاستیسیته<sup>۳</sup> به عنوان تحلیل حساسیت محلی انجام گرفته تا حساسیت خروجی پس از آموزش ارزیابی شود.

<sup>1</sup> Graph traversal

<sup>2</sup> Depth First Search (DFS)

<sup>3</sup> Elasticity-Based Sensitivity Analysis

<sup>4</sup> Average Elasticity

<sup>5</sup> Average Absolute Elasticity

را نشان می‌دهد که در آن  $\pi_3$  بیشترین تأثیر مطلق ( $1/0.781$ ) را اعمال می‌کند و پس از آن  $\pi_2$  ( $0/5320$ ) و  $\pi_1$  ( $0/3418$ ) قرار دارند. این ترتیب نشان می‌دهد که مدل GMDH به طور نامتناسبی برای تغییرپذیری پیش‌بینی به  $\pi_3$  متکی است که احتمالاً به دلیل اثر نرخ کرنش و بارگذاری ضربه‌ای آن است، در حالی که  $\pi_1$  و  $\pi_2$  نقش‌های پشتیبانی را ایفا می‌کنند. این بینش‌ها می‌توانند به اصلاح بیشتر مدل، مانند مهندسی ویژگی یا ارزیابی عدم قطعیت متمرکز بر ورودی‌های با حساسیت بالا، برای افزایش استحکام و تفسیرپذیری کمک کنند.

در ادامه، روش تحلیل حساسیت مشتقات جزئی<sup>۱</sup> (PDSA) نرخ مطلق تغییر خروجی را نسبت به هر متغیر ورودی محاسبه می‌کند که با مشتق جزئی  $\partial Y / \partial X_i$  بیان شده و در هر نقطه داده با استفاده از تقریب تفاضل محدود ارزیابی می‌شود. لذا یک اغتشاش کوچک ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ) به هر ورودی اعمال شد در حالی که سایر متغیرها ثابت نگه داشته شدند و تغییر حاصل در خروجی به صورت  $(\pi_0(\pi_i + \varepsilon) - \pi_0(\pi_i)) / \varepsilon$  محاسبه گردید. این تحلیل در مقیاس اصلی داده‌ها انجام شد. نتایج PDSA برای تمامی ۶۵ نقطه داده در جدول ۸ ارائه شده است. در این جدول، مشتقات جزئی  $\pi_0$  پیش‌بینی‌شده نسبت به ورودی‌های  $\pi_1$ ،  $\pi_2$  و  $\pi_3$  را برای هر یک از ۶۵ نقطه داده نشان می‌دهد. آمارهای توصیفی، الگوهای متمایزی در حساسیت آشکار می‌سازند. برای ورودی اول، میانگین  $0/000001477$  است، با میانگین قدرمطلق  $0/000002799$ ، و در  $69/67\%$  نقاط مثبت است که نشان‌دهنده تأثیری ضعیف اما عموماً مثبت است که اغلب نزدیک به صفر است و حاکی از حساسیت محدود به  $\pi_1$  در سراسر مجموعه داده است. برای ورودی دوم، میانگین  $0/1143$  است، با میانگین قدرمطلق  $0/1166$ ، و در  $92/96\%$  نقاط مثبت است که نشان از یک اثر مثبت متوسط و پایدار دارد و دلالت بر این دارد که افزایش در  $\pi_2$  معمولاً منجر به افزایش در  $\pi_0$  می‌شود. برای ورودی سوم، میانگین  $-29/603$  است، با میانگین قدرمطلق  $31/529$ ، و تنها در  $23/9\%$  نقاط مثبت است که

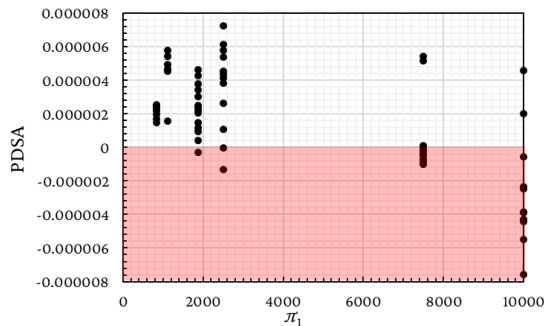
دارد در مقایسه با سایر ورودی‌ها، زیرا اختلالات در  $\pi_1$  کوچک‌ترین تغییرات نسبی در خروجی را ایجاد می‌کنند. میانگین کشسانی مطلق برابر با  $0/3418$  نشان می‌دهد که بزرگی پاسخ در سراسر نقاط داده متفاوت است. میانگین کشش مطلق به طور قابل توجهی بالاتر است که ممکن است به ناهمگونی در داده‌ها اشاره داشته باشد (هندسه متفاوت دو دسته داده). چنین تنوعی، احتیاط در تفسیر نقش  $\pi_1$  را ضروری می‌سازد، زیرا تأثیر آن وابسته به کاربر صنعتی بوده و در مقایسه با سایر ورودی‌ها کمتر غالب است.

(۲) در مقابل،  $\pi_2$  تأثیر مثبت برجسته‌تری نشان می‌دهد، با میانگین کشسانی  $0/4937$ . این مقدار نشان‌دهنده آن است که افزایش  $1\%$  در  $\pi_2$  معمولاً منجر به افزایش  $0/4937\%$  در  $\pi_0$  می‌شود. میانگین کشسانی مطلق  $0/5320$  به طور نزدیکی با این رقم همخوانی دارد و اثرات جهت‌دار سازگار در سراسر مجموعه داده را منعکس می‌کند. در نتیجه، اختلالات در  $\pi_2$  احتمالاً تغییرات قابل پیش‌بینی و معناداری در پیش‌بینی‌ها ایجاد می‌کنند و اهمیت متوسط آن را در پویایی مدل برجسته می‌کنند.

(۳)  $\pi_3$  با میانگین کشش  $-1/0442$ ، برجسته‌ترین حساسیت را نشان می‌دهد که نشان‌دهنده‌ی یک رابطه‌ی معکوس قوی است: افزایش  $1\%$  درصدی در  $\pi_3$  عموماً منجر به کاهش  $1/0442\%$  درصدی در  $\pi_0$  می‌شود. این ضریب منفی، پتانسیل  $\pi_3$  را به عنوان یک عامل سرکوبگر در سیستم برجسته می‌کند. میانگین کشش مطلق  $1/0781$  این تسلط را تقویت می‌کند و نشان می‌دهد که بزرگی اثر  $\pi_3$  در بین ورودی‌ها، با جهت‌گیری نسبتاً یکنواخت، بزرگترین است. این نشان می‌دهد که  $\pi_3$  اهرم اصلی برای تأثیرگذاری بر  $\pi_0$  است و تغییرات کوچک در مقدار آن می‌تواند خروجی‌های مدل را به طور قابل توجهی تغییر دهد و آن را به یک متغیر حیاتی برای نظارت یا بهینه‌سازی در کاربردهای عملی تبدیل کند. در مجموع، جدول سلسله‌مراتبی از تأثیرات ورودی

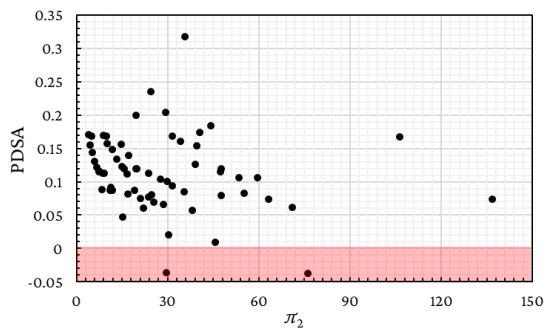
<sup>1</sup> Partial Derivative Sensitivity Analysis (PDSA)

داده‌های بیشتر در بازه‌های حساس، یا اعمال محدودیت‌های عملیاتی را فراهم می‌سازد. در مجموع، همسویی نظام‌مند الگوهای استخراج‌شده از تحلیل PDSA با انتظارات تئوریک یا فرضیه‌های اولیه، استحکام و قابلیت اعتماد مدل GMDH را در شناسایی صحیح روابط علی-معلومی پیچیده تأیید می‌کند.



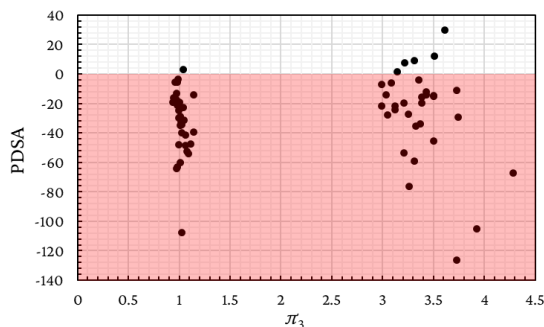
شکل ۳. نتایج تحلیل حساسیت مشتقات جزئی بر حسب ورودی  $\pi_1$  برای مدل GMDH ساخته‌شده.

Figure 3. The results of partial derivative sensitivity analysis versus  $\pi_1$  for the conducted GMDH model.



شکل ۴. نتایج تحلیل حساسیت مشتقات جزئی بر حسب ورودی  $\pi_2$  برای مدل GMDH ساخته‌شده.

Figure 4. The results of partial derivative sensitivity analysis versus  $\pi_2$  for the conducted GMDH model.



شکل ۵. نتایج تحلیل حساسیت مشتقات جزئی بر حسب ورودی  $\pi_3$  برای مدل GMDH ساخته‌شده.

Figure 5. The results of partial derivative sensitivity analysis versus  $\pi_3$  for the conducted GMDH model.

بر حساسیت قوی منفی تأکید می‌کند؛ جایی که افزایش در  $\pi_3$  عمدتاً باعث کاهش  $\pi_0$  می‌گردد. این یافته‌ها بر نقش غالب  $\pi_3$  در پیش‌بینی‌های مدل تأکید می‌کنند که بزرگی آن بازتاب‌دهنده تأثیر قابل توجه نسبت به واریانس واحد است. تغییرپذیری در مشتقات  $\pi_1$ ، با بسیاری از مقادیر نزدیک به صفر، بر سهم کم‌اهمیت آن تأکید می‌کند، در حالی که مقادیر مثبت پایدار  $\pi_2$  نشان‌دهنده یک اثر افزایشی قابل اتکا است. این تحلیل با ساختار غیرخطی چندجمله‌ای مدل هم‌سو است، جایی که حساسیت‌ها به دلیل حضور جمله‌های درجه دوم بر اساس نقطه داده متغیر هستند. در کل، نتایج، دریافت تأثیرات تفاضلی ورودی‌ها توسط مدل را تأیید می‌کند، با نقش  $\pi_3$  به عنوان محرک اصلی.

#### جدول ۸. نتایج تحلیل حساسیت مشتقات جزئی

Table 8. The results of the partial derivative sensitivity analysis (PDSA)

ورودی	میانگین مشتق جزئی	میانگین مطلق مشتق جزئی	مشتقات مثبت (%)
$\pi_1$	$1/477 \times 10^{-6}$	$2/799 \times 10^{-6}$	۶۷/۶۹
$\pi_2$	۰/۱۱۴۳	۰/۱۱۶۶	۹۶/۹۲
$\pi_3$	-۲۹/۶۰۳	۳۱/۵۲۹	۹/۲۳

برای نمایش دقیق توزیع حساسیت‌های محلی در مدل، تغییرات مشتقات جزئی در شکل‌های ۳ تا ۵ به ترتیب برای متغیرهای  $\pi_1$ ،  $\pi_2$  و  $\pi_3$  ترسیم شده است. شکل ۳ یک توزیع نامتقارن و متمایل به مقادیر مثبت بالا برای  $\partial\pi_0/\partial\pi_1$  را نشان می‌دهد که مؤید نقش تقویت‌کننده قوی و نسبتاً پایدار این متغیر بر خروجی اصلی است. شکل ۴ الگوی پراکنده‌تر اما همچنان با میانگین مثبت برای  $\partial\pi_0/\partial\pi_2$  را نمایش می‌دهد که حاکی از یک اثر مثبت اما با نوسان و وابستگی بیشتر به شرایط دیگر است. این در حالی است که شکل ۵ به وضوح گرایش غالب مقادیر به سمت منفی را برای  $\partial\pi_0/\partial\pi_3$  آشکار می‌سازد که فرضیه تأثیر بازدارنده یا کاهنده این پارامتر را به صورت کمی تقویت می‌کند. فراتر از نشان دادن جهت کلی تأثیرات، این نمودارها با آشکارسازی نقاط پرت یا خوشه‌های مکانی که در آنها مقدار مشتق به طور غیرعادی زیاد یا کوچک می‌شود، نواحی بحرانی و پتانسیل ناپایداری مدل را مشخص می‌کنند. این بینش، امکان اعمال تنظیمات هدفمند در ساختار مدل، جمع‌آوری

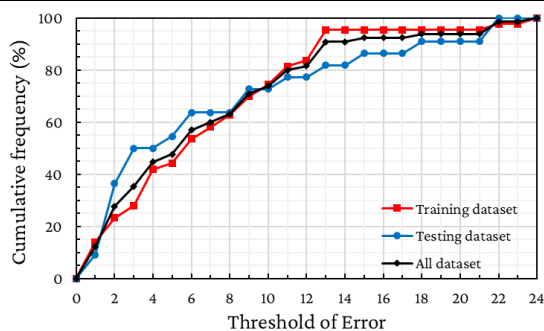
## ۳-۴- تحلیل خطا

می‌رسد که نشان می‌دهد تمام پیش‌بینی‌ها در محدوده خطای نسبی ۲۴٪ قرار دارند و انحرافات بسیار زیاد یا قابل توجه وجود ندارد. هم‌راستایی نزدیک بین منحنی‌های آموزش و آزمون، نشان‌دهنده عدم بیش‌برازش است، درحالی‌که افزایش سریع فراوانی تا آستانه ۱۰٪ (بیش از ۷۰٪ برای همه زیرمجموعه‌ها)، دقت مدل را برای اکثر نقاط برجسته می‌سازد. باین‌حال، انباشت آهسته‌تر بین ۱۰٪ تا ۲۰٪ نشان‌دهنده فرصت‌هایی برای بهبود در مدیریت داده‌های پرت است، به‌ویژه در محدوده‌های پایین‌تر  $\pi_0$  که خطاهای نسبی تشدید می‌شوند. این توزیع، تأکید تحقیق بر دسته‌بندی خطا را بازتاب می‌دهد و اثربخشی مدل را برای مجموعه داده تأیید می‌کند.

## جدول ۹. نتایج تحلیل خطا

Table 9. The results of error analysis

آستانه خطا (%)	فراوانی تجمعی (%)	
	آموزش	آزمون
۰	۰/۰۰	۰/۰۰
۲	۲۳/۲۶	۳۶/۳۶
۴	۴۱/۸۶	۵۰/۱۰۰
۶	۵۳/۴۹	۶۳/۶۴
۸	۶۲/۷۹	۶۳/۶۴
۱۰	۷۴/۴۲	۷۲/۷۳
۱۲	۸۳/۷۲	۷۷/۲۷
۱۴	۹۵/۳۵	۸۱/۸۲
۱۶	۹۵/۳۵	۸۶/۳۶
۱۸	۹۵/۳۵	۹۰/۹۱
۲۰	۹۵/۳۵	۹۰/۹۱
۲۲	۹۷/۶۷	۱۰۰/۰۰
۲۴	۱۰۰/۰۰	۱۰۰/۰۰



شکل ۶. ترسیم درصد فراوانی تجمعی برحسب آستانه خطا.

Figure 6. Plotting cumulative frequency versus threshold of error.

تحلیل خطای مدل روش GMDH با ارزیابی توزیع خطاهای نسبی مطلق در میان پیش‌بینی‌ها انجام شد. این کار شامل دسته‌بندی خطاها در بازه‌هایی مانند کمتر از ۱۰٪، بین ۱۰٪ تا ۲۰٪ و بیشتر از ۲۰٪ است تا سهم مقادیر شبیه‌سازی‌شده در هر محدوده ارزیابی شود. خطای نسبی مطلق برای هر نقطه داده به صورت  $|\pi_{0,real} - \pi_{0,predicted}| / \pi_{0,real} \times 100$  محاسبه گردید. این تحلیل به طور جداگانه برای زیرمجموعه آموزش (۴۳ نقطه)، زیرمجموعه آزمون (۲۲ نقطه) و کل مجموعه داده (۶۵ نقطه) انجام شد که بینش‌هایی در مورد ثبات مدل و حوزه‌های بالقوه بهبود ارائه می‌دهد. جدول ۹، درصد فراوانی تجمعی<sup>۱</sup> پیش‌بینی‌هایی را نشان می‌دهد که دارای خطای نسبی مطلق کمتر یا مساوی آستانه‌های مشخص‌شده برای داده‌های آموزش، آزمون و کل داده‌ها هستند. این مقادیر با گام‌های ۲٪ از ۰٪ تا ۳۰٪ محاسبه شده‌اند که می‌توان از آن برای رسم آستانه خطا<sup>۲</sup> بر حسب درصد فراوانی تجمعی استفاده کرد (شکل ۶).

نتایج نشان‌دهنده افزایش تدریجی فراوانی تجمعی با افزایش آستانه خطا است که نشان می‌دهد اکثر پیش‌بینی‌ها به خطاهای نسبی پایین دست‌یافته‌اند. این روند در هر سه بخش داده‌ها (آموزش، آزمون و کل) مشابه است و نشان از عملکرد پایدار و قابل‌اطمینان مدل دارد. برای زیرمجموعه آموزش، فراوانی تجمعی در آستانه ۱۰٪ به ۷۴٪ می‌رسد و در ۲۰٪ به ۹۵٪ افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده عملکرد قوی مدل بر روی داده‌های آزمایشگاهی است و تنها بخش کوچکی (۵٪) خطای بیش از ۲۰٪ دارند. زیرمجموعه آزمون الگوی مشابهی را نشان می‌دهد، به‌طوری‌که در آستانه ۱۰٪ به ۷۳٪ و در ۲۰٪ به ۹۱٪ می‌رسد و ۹٪ خطای بالای ۲۰٪ دارند که توانایی تعمیم مدل را بدون افت قابل توجه تأیید می‌کند. در کل مجموعه داده، این مقادیر در آستانه ۱۰٪ برابر ۷۴٪ و در ۲۰٪ برابر ۹۴٪ است که نشان‌دهنده استحکام کلی مدل است. شایان توجه است که فراوانی تجمعی پس از ۲۲٪ برای زیرمجموعه آزمون و پس از ۲۴٪ برای داده‌های آموزش و کل داده‌ها به حالت ثابت

<sup>1</sup> Cumulative frequency

<sup>2</sup> Threshold of error

## جدول ۱۰. نتایج تحلیل پایداری و مقاومت مدل

Table 10. Results of stability and robustness analysis of the model

شاخص/آزمون	مقدار	حد پایین بازه اطمینان ۹۵٪ (Bootstrap)	حد بالای بازه اطمینان ۹۵٪ (Bootstrap)
RMSE	۰/۸۸۴	۰/۷۴۱	۱/۰۲۱
MAE	۰/۷۱۱	۰/۵۸۲	۰/۸۴۶
MAPE (%)	۶/۶۷	۵/۲۹	۸/۱۶
R <sup>2</sup>	۰/۹۸۹	۰/۹۸۱	۰/۹۹۳
Max  e	۲/۰۵۰		
Max  Robust Z  (MAD)	۲/۴۴۳		
RMSE (پس از حذف ۱ نقطه با بیشترین خطا)	۰/۸۵۳		
RMSE (پس از حذف ۳ نقطه با بیشترین خطا)	۰/۷۹۶		
RMSE (پس از حذف ۵ نقطه با بیشترین خطا)	۰/۷۴۹		
مقدار p آزمون کولموگروف-اسمیرنوف (KS)	۰/۹۲۸		
مقدار p آزمون مان-ویتنی	۰/۶۲۳		
مقدار p آزمون لون	۰/۸۶۰		

برابر ۲/۴۴۳ بود که نشان می‌دهد باقیمانده‌ها فاقد نقاط به‌شدت افراطی هستند. علاوه بر این، تحلیل حذف نقاط با بزرگ‌ترین خطای مطلق نشان داد حذف یک نقطه با بیشترین خطا، RMSE را از ۰/۸۸۴ به ۰/۸۵۳ کاهش می‌دهد و حذف سه و پنج نقطه به ترتیب آن را به ۰/۷۹۶ و ۰/۷۴۹ می‌رساند؛ این تغییرات اگرچه بهبود قابل انتظار ایجاد می‌کنند، اما نشان‌دهنده آن است که شاخص‌های عملکرد توسط تعداد محدودی مشاهده کنترل نمی‌شوند و مدل از منظر حساسیت به پرت‌ها رفتار شکننده‌ای ندارد. در نهایت، برای بررسی وابستگی الگوی خطا به مجموعه آموزش/آزمون، آزمون‌های دو نمونه‌ای روی توزیع باقیمانده‌ها انجام شد. نتایج آزمون‌ها اختلاف معناداری بین باقیمانده‌های آموزش و آزمون نشان ندادند. مجموع این شواهد بیانگر آن است که مدل از نظر پایداری عملکرد، مقاومت نسبت به داده‌های پرت و سازگاری رفتار خطا در مجموعه‌های آموزش و آزمون، از قابلیت اتکای مناسبی برخوردار است.

## ۳-۶- تحلیل عدم قطعیت

برای ارزیابی جامع قابلیت اطمینان پیش‌بینی و پایداری مدل GMDH پیشنهادی، یک تحلیل عدم قطعیت دقیق با پیروی از روش‌های آماری موجود انجام شد. این تحلیل،

## ۳-۵- تحلیل پایداری و مقاومت مدل

به‌منظور ارزیابی قابلیت اتکای مدل فراتر از گزارش صرف شاخص‌های دقت، پایداری عملکرد، حساسیت به داده‌های پرت و وابستگی نتایج به تقسیم‌بندی داده‌ها بررسی شد. در این راستا، باقیمانده‌ها به‌صورت  $(e_j = P_j - O_j)$  تعریف و شاخص‌های عملکرد روی کل داده‌ها و نیز به تفکیک مجموعه‌های آموزش و آزمون محاسبه گردیدند (جدول ۵). نتایج نشان داد مقادیر RMSE/MAE/MAPE در دو زیرمجموعه آموزش و آزمون نزدیک به یکدیگر است (به‌عنوان مثال، RMSE آموزش ۰/۸۶۷ و RMSE آزمون ۰/۹۱۷)، که بیانگر سازگاری عملکرد مدل در دو مجموعه و فقدان شواهد آشکار از بیش‌برازش است. برای سنجش پایداری آماری شاخص‌های عملکرد، از بازنمونه‌گیری Bootstrap استفاده شد و بازه‌های اطمینان ۹۵٪ برای معیارهای اصلی محاسبه گردید (جدول ۱۰). بازه‌های به‌دست‌آمده (برای نمونه  $RMSE \in [0.741, 1.021]$  و  $R^2 \in [0.981, 0.993]$ ) نشان می‌دهد برآورد عملکرد مدل از نظر آماری پایدار بوده و نسبت به تغییرات نمونه‌گیری، نوسان محدودی دارد. در گام بعد، حساسیت مدل به داده‌های پرت از طریق تحلیل نفوذ مبتنی بر باقیمانده‌ها بررسی شد. بیشینه خطای مطلق برابر ۲/۰۵۰ و بیشینه نمره مقاوم مبتنی بر MAD

«رویکرد امتیاز ویلسون<sup>۲</sup>» با صرف نظر از تصحیح پیوستگی<sup>۳</sup> ایجاد شد. یک بازه توزیع نرمال که به عنوان یک توزیع نرمال نامتقارن اصلاح شده است، با عنوان بازه امتیاز ویلسون، برای اصلاح مرزهای CI به کار گرفته شد. لذا در ابتدا برای ارزیابی معناداری آماری سوگیری مدل و ایجاد یک بازه اطمینان برای میانگین خطا، خطای استاندارد ( $SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ) محاسبه و مقدار ۰/۱۱۰۵ حاصل شد. سپس، بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین خطا به صورت  $95\%CI = \mu \pm 1.96 \times SE$  تعیین گردید. در ادامه، یک معیار کلیدی برای ارزیابی پایداری پیش‌بینی، عرض باند عدم قطعیت<sup>۴</sup> (WUB) به عنوان نصف عرض بازه اطمینان ۹۵٪ محاسبه شد:

$$WUB = \pm \frac{CI_{Upper Bound} - CI_{Lower Bound}}{2} \quad (49)$$

نتایج تحلیل عدم قطعیت به دست آمده منجر به کران پایین ۰/۲۵۱۶- و کران بالای ۰/۱۸۱۸ برای بازه اطمینان (CI) شد. این واقعیت که این فاصله شامل صفر است، تأیید می‌کند که کم‌تخمینی جزئی مشاهده شده در سطح اطمینان ۹۵٪ از نظر آماری معنادار نیست. به عبارت دیگر، این نشان می‌دهد که مدل هیچ سوگیری سیستماتیک قابل توجهی از خود نشان نمی‌دهد. مقدار WUB برابر با ۰/۲۱۶۷ به دست آمد که نشان‌دهنده حاشیه خطای مرتبط با میانگین پیش‌بینی مدل است. این مقدار نسبتاً کم، نشان‌دهنده یک عرض عدم قطعیت باریک بوده و بیانگر پایداری و قابلیت اطمینان بالای پیش‌بینی است. لازم به توضیح است که در این پژوهش، منظور از تحلیل عدم قطعیت، کمی‌سازی عدم قطعیت در سطح پیش‌بینی‌ها و خطاهای مدل (بر مبنای باقیمانده‌ها) است؛ به بیان دیگر، تمرکز بر عدم قطعیت خروجی‌های مدل و شاخص‌های خطا قرار دارد. بر این اساس، فاصله‌های اطمینان ارائه شده مربوط به آماره‌های خطا و عملکرد پیش‌بینی (مانند میانگین خطا و باند عدم قطعیت) بوده و به معنای گزارش فاصله اطمینان برای ضرایب داخلی چندجمله‌ای مدل نیست.

شکل ۷، هیستوگرامی از خطاهای پیش‌بینی مدل GMDH را نشان می‌دهد که با منحنی توزیع نرمال برازش شده همپوشانی دارد.

تغییرپذیری و سطح اطمینان مرتبط با پیش‌بینی‌های مدل را کمی‌سازی می‌کند و بینش ضروری در مورد استحکام عملیاتی آن برای کاربردهای عملی فراهم می‌آورد. تحلیل عدم قطعیت با محاسبه خطاهای پیش‌بینی ( $e_j$ ) به عنوان تفاوت بین مقادیر پیش‌بینی شده ( $P_j$ ) و مقادیر مشاهده شده ( $O_j$ ) برای تمامی ۶۵ داده مطابق با رابطه (۴۸) انجام شد:

$$e_j = P_j - O_j \quad (48)$$

سپس گرایش به مرکز و پراکندگی این خطاها با محاسبه میانگین خطا ( $\mu$ ) و انحراف معیار ( $\sigma$ ) با استفاده از معادلات (۴۹) و (۵۰) مشخص شد:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_j \quad (49)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (e_j - \mu)^2}{n - 1}} \quad (50)$$

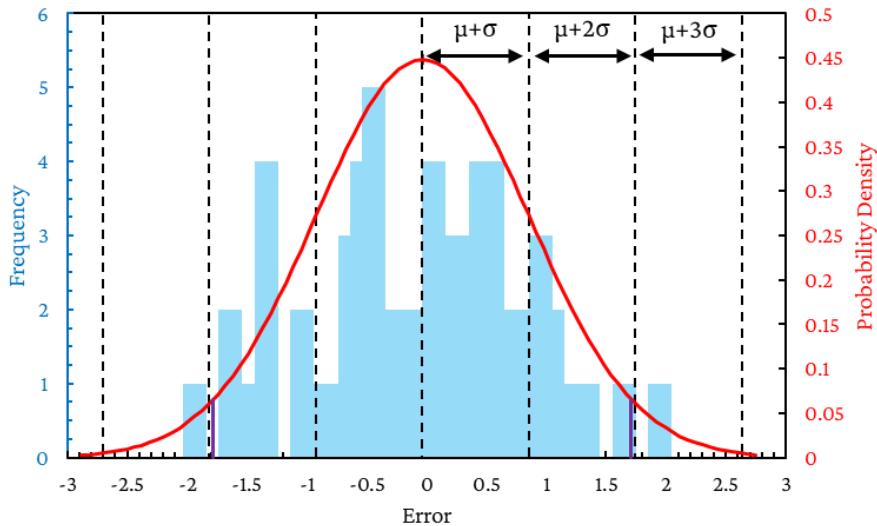
در یک مدل، اگر علامت مقدار میانگین خطا منفی باشد، پاسخ کمتر از مقدار واقعی تخمین زده می‌شود و اگر این علامت مثبت باشد، خروجی بیش از مقدار واقعی تخمین زده می‌شود. در مطالعه حاضر، مقدار میانگین خطا ۰/۰۳۴۹- به دست آمد که نشان‌دهنده یک کم‌تخمینی سیستماتیک ناچیز توسط مدل است. انحراف معیار خطاها نیز ۰/۸۹۱۱ محاسبه شد که بازتاب‌دهنده پراکندگی معمول پیش‌بینی‌های فردی حول میانگین خطا می‌باشد. در عمل، یک مدل یادگیری ماشین قادر به پیش‌بینی دقیق مقادیر واقعی نیست؛ در عوض، رابطه بین ورودی‌ها و میانگین مربوط به خروجی را مدل‌سازی می‌کند. از این رو، همیشه مقداری عدم قطعیت در پیش‌بینی خروجی وجود دارد. بازه اطمینان می‌تواند این عدم قطعیت را در بر بگیرد، به این معنی که محدوده میانگین خروجی‌ها را در یک ورودی معین تعیین می‌کند، به عنوان مثال، اگر ورودی مشخص باشد، عدم قطعیت در اطراف مقدار میانگین خروجی چقدر است؟ یک بازه اطمینان ۹۵٪ بیان می‌کند که برای یک ورودی معین، مدل ۹۵٪ اطمینان دارد که میانگین واقعی در آن ناحیه خواهد بود. بنابراین، یک بازه اطمینان<sup>۱</sup> (CI) حول مقادیر خطا با استفاده از مقادیر میانگین خطا، انحراف معیار و

<sup>2</sup> Wilson Score Approach

<sup>3</sup> Continuity correction

<sup>4</sup> Width of Uncertainty Bound (WUB)

<sup>1</sup> Confidence Interval (CI)



شکل ۷. هیستوگرام خطاهای پیش‌بینی و توزیع نرمال همپوشانی شده.  
**Figure 7.** Histogram of prediction errors and overlaid normal distribution.

متمركز شده که نشان‌دهنده انحرافات با دامنه کم برای اغلب پیش‌بینی‌ها است. میانگین منفی اندک، نشان‌دهنده تمایل جزئی به پیش‌بینی کمتر از حد واقعی است که با ضریب جرم باقی‌مانده (CRM) گزارش شده قبلی برابر با  $-0/002$  برای کل مجموعه داده سازگار است. دم‌های توزیع تا حداقل و حداکثر خطاهای  $-1/9358$  تا  $2/05$  امتداد یافته‌اند، اما با فراوانی‌های پایین که نشان‌دهنده نقاط پرت نادر است. برازش توزیع نرمال معقول به نظر می‌رسد، هرچند انحرافات جزئی در دم‌ها، عدم نرمالیتی خفیفی را پیشنهاد می‌کند که ممکن است ناشی از ناهمگنی داده‌ها یا اثرات غیرخطی باشد که به‌طور کامل توسط مدل پوشش داده نشده‌اند. به‌طور کلی، شکل، استحکام مدل GMDH را تأیید می‌کند، زیرا میانگین نزدیک به صفر و انحراف معیار متوسط با میانگین خطای مطلق (MAE) پایین برابر با  $0/711$  و ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) برابر با  $0/884$  همخوانی دارد. تقریبی بودن نرمالیتی خطاها، فرض باقی‌مانده‌های تصادفی را پشتیبانی می‌کند و نشان‌دهنده عدم وجود سوگیری سیستماتیک قابل توجه است. با این حال، وجود چند خطای بزرگ‌تر (مانند فراتر از  $\pm 1/5$ ) فرصت‌هایی برای بهبود را برجسته می‌سازد، مانند پرداختن به نقاط داده خاص با خطاهای نسبی بالا در دامنه‌های پایین خروجی. این تحلیل، معیارهای کمی را تکمیل می‌کند و بر مناسب بودن مدل برای مجموعه داده تأکید دارد، در حالی که حوزه‌های بالقوه برای ارتقا را شناسایی می‌نماید.

خطاها از مجموعه داده‌ای شامل ۶۵ نقطه با میانگین خطای  $-0/0349$  و انحراف معیار  $0/8904$  استخراج شده‌اند. هر بخش در سمت چپ و راست (خطوط بنفش‌رنگ) روی منحنی زنگوله‌ای شکل، نشان‌دهنده میانگین خطای تجمعی  $2/5\%$  است که از رابطه  $\mu \pm 1.96 \times S_E$  قابل محاسبه می‌باشد. با توجه به این رابطه، مقادیر حدود پایین  $(2/5\%)$  و بالا  $(97/5\%)$  به ترتیب  $-1/7814$  و  $1/7115$  به دست می‌آیند. بازه‌های هیستوگرام تقریباً از  $-1/9358$  تا  $2/05$  گسترانده شده‌اند، با فراوانی‌هایی که شکل توزیع را نشان می‌دهند. منحنی نرمال که بر اساس میانگین و انحراف معیار پارامترسازی شده است، به‌طور نزدیک با میله‌های هیستوگرام همخوانی دارد و پیشنهاد می‌کند که خطاها تقریباً به‌صورت نرمال توزیع شده‌اند. این نمایش بصری، ارزیابی عدم قطعیت پیش‌بینی مدل و رفتار باقی‌مانده‌ها را تسهیل می‌کند. از نظر بصری، هیستوگرام شکلی تقریباً متقارن و تک‌قله‌ای را نشان می‌دهد که در ناحیه مرکزی به‌طور نزدیک با منحنی نظری نرمال همخوانی دارد. با این حال، انحرافات در دم‌ها و نزدیک مرکز مشاهده می‌شود. به‌طور خاص، دم چپ ( $-1/3$  تا  $-0/5$ ) و بخشی از ناحیه مرکزی راست ( $0/0$  تا  $0/5$ ) فراوانی‌هایی کمی بالاتر از آنچه تحت توزیع نرمال انتظار می‌رود، نشان می‌دهند. این امر پیشنهاد می‌کند که توزیع تجربی خطاها، دم‌های کمی سنگین‌تر و قلّه‌ای مسطح‌تر نسبت به توزیع نرمال کامل با میانگین و واریانس یکسان دارد. به‌طور کلی، هیستوگرام، در نزدیکی صفر متمركز است، با بخش عمده خطاها بین  $-1$  و  $1$

## جدول ۱۱. نتایج آزمون‌های نرمالیتی

Table 11. Normality test results

مجموعه داده	تعداد داده	شاپیرو-ویلک	p-value	کولموگروف-اسمیرنوف با تصحیح Lilliefors	p-value
کل داده‌ها	۶۵	۰/۹۸۸	۰/۷۹۸	۰/۰۶۰	۰/۰۸۵۶
آموزش	۴۳	۰/۹۸۴	۰/۷۹۸	۰/۰۶۲	۰/۹۴۹
آزمون	۲۲	۰/۹۸۷	۰/۹۸۹	۰/۰۷۲	۰/۹۹۰

## ۴- نتیجه گیری

نتایج این تحقیق تأیید می‌کند که مدل GMDH به‌عنوان یک رویکرد داده‌محور پیشرفته و در عین حال تفسیرپذیر، توانایی قابل توجهی در پیش‌بینی پاسخ پلاستیک دینامیکی ورق‌های فلزی تحت بار ضربه‌ای/هیدرودینامیکی دارد. عملکرد مدل با MAPE کمتر از ۷٪ و  $R^2$  نزدیک به ۱ نشان می‌دهد دقت میانگین پیش‌بینی بیش از ۹۳٪ بوده و از این منظر می‌توان آن را به‌عنوان یک مدل جانشین کارآمد در کنار یا به‌جای روش‌های محاسباتی سنگین مانند تحلیل اجزای محدود مطرح کرد. اهمیت این موضوع به‌ویژه در سناریوهایی آشکار می‌شود که تحلیل‌های عددی دقیق به دلیل هزینه محاسباتی بالا، امکان پیمایش گسترده فضای طراحی یا اجرای تحلیل‌های پارامتریک/بهینه‌سازی را محدود می‌کنند؛ در حالی که مدل پیشنهادی امکان دستیابی به پیش‌بینی‌های سریع و قابل اتکا را فراهم می‌سازد و در نتیجه، ظرفیت کاوش فضای طراحی و تصمیم‌گیری مهندسی را به‌صورت معناداری افزایش می‌دهد.

یکی از نوآوری‌های کلیدی مطالعه حاضر، ادغام تحلیل ابعادی و بی‌بعدسازی معادلات حاکم (از جمله معادلات تعادل دینامیکی با در نظر گرفتن اثرات غشایی و نرخ کرنش بر پایه مدل کوپر-سیموندز (در کنار استفاده از داده‌های تجربی واقعی از آزمایش‌های هیدرودینامیکی است. این تلفیق موجب شد متغیرها در قالب گروه‌های بی‌بعد و معنی‌دار فیزیکی بازنمایی شوند و هم‌زمان مدل از داده‌هایی بهره‌بردار که رفتار واقعی سامانه را منعکس می‌کنند. در نتیجه، مدل نه‌تنها از منظر دقت پیش‌بینی ارتقا یافت، بلکه تعمیم‌پذیری و کاربردپذیری آن برای شرایط عملیاتی تقویت شد و امکان پیش‌بینی سریع پاسخ در سناریوهای نزدیک به واقعیت فراهم گردید.

برای ارزیابی توزیع متغیر خروجی در مجموعه داده، آزمون‌های نرمالیتی باید بر روی مقادیر خام خروجی اعمال شوند. این امر، بینشی در مورد ویژگی‌های ذاتی داده‌ها پیش از مدل‌سازی فراهم می‌کند. با این حال، برای ارزیابی فرضیات و عملکرد مدل GMDH به‌ویژه در خصوص توزیع خطاها و سوگیری‌های بالقوه، آزمون‌های نرمالیتی به‌طور مناسب‌تر بر روی باقی‌مانده‌ها (یعنی تفاوت‌های بین مقادیر واقعی و پیش‌بینی‌شده خروجی) انجام می‌شوند. در مدل‌های مبتنی بر رگرسیون مانند GMDH، نرمالیتی باقی‌مانده‌ها یک شاخص تشخیصی کلیدی است، زیرا پیشنهاد می‌کند که خطاهای مدل تصادفی هستند و به‌طور سیستماتیک تحت تأثیر عوامل مدل‌سازی نشده قرار نگرفته‌اند. باقی‌مانده‌های حاصل از پیش‌بینی‌های مدل GMDH، ویژگی‌هایی سازگار با توزیع نرمال را نشان می‌دهند که توسط آزمون‌های آماری تأیید شده است. به‌منظور مستندسازی فرض نرمال بودن خطا، آزمون‌های شاپیرو-ویلک و کولموگروف-اسمیرنوف با تصحیح لیلیفورس بر روی باقیمانده‌های مدل اجرا شد. مطابق جدول ۱۱، در سطح معنی‌داری  $\alpha = 0.05$ ، هیچ‌یک از آزمون‌ها انحراف معناداری از نرمالیت را برای کل داده‌ها و نیز زیرمجموعه‌های آموزش و آزمون نشان ندادند (همگی  $p > 0.05$ ). به‌طور جزئی‌تر، آزمون شاپیرو-ویلک آماره‌ای برابر با ۰/۹۸۸ و مقدار p برابر با ۰/۷۹۸ تولید کرد که فراتر از سطح معناداری ۰/۰۵ است و بنابراین، فرض صفر نرمالیتی را رد نمی‌کند. به همین ترتیب، آزمون کولموگروف-اسمیرنوف آماره‌ای برابر با ۰/۰۶۰ و مقدار p برابر با ۰/۹۶۴ به دست داد که همچنین بالاتر از ۰/۰۵ است و نتیجه‌گیری مبنی بر تطابق باقی‌مانده‌ها با توزیع نرمال را پشتیبانی می‌کند. این یافته‌ها نشان‌دهنده عدم انحراف معنادار از نرمالیتی هستند که با فرضیات اغلب زیربنایی مدل‌های مبتنی بر رگرسیون همخوانی دارد و عملکرد قوی مدل را از نظر توزیع خطاها پیشنهاد می‌کند.

برای اطمینان از سلامت داده‌ها و جلوگیری از ورود اطلاعات همپوشان به مدل، وابستگی بین ورودی‌ها پیش از مدل‌سازی مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل همبستگی (به‌صورت پیرسون برای روابط خطی و اسپیرمن برای روابط یکنواخت و مقاوم‌تر نسبت به نرمال نبودن) و همچنین گزارش شاخص‌های چندهمخطی مانند VIF، نشان داد مجموعه ورودی‌ها از منظر همپوشانی اطلاعاتی در وضعیت کنترل‌شده‌ای قرار دارد و احتمال بروز چندهمخطی شدید که می‌تواند بر پایداری مدل اثرگذار باشد کاهش یافته است. این مرحله به‌طور مستقیم به استحکام مدل و قابلیت تفسیر نتایج حساسیت کمک می‌کند، زیرا رتبه‌بندی اثرگذاری پارامترها در حضور همبستگی شدید می‌تواند دچار ابهام یا جابه‌جایی مصنوعی شود.

از منظر تفسیرپذیری و استخراج بینش مهندسی، تحلیل حساسیت به‌صورت چندگانه انجام شد. نتایج تحلیل‌های ذاتی مبتنی بر ساختار شبکه، تحلیل محلی مبتنی بر کشسانی و مشتقات جزئی همگی به‌صورت هم‌راستا نشان دادند که پارامترهای مرتبط با نرخ کرنش و انرژی/شدت بارگذاری ضربه‌ای نقش غالبی در تغییرات پاسخ دارند؛ به‌طور مشخص، اهمیت بالای پارامتر نرخ کرنش و جهت اثر آن (منفی غالب در محدوده داده‌های مشاهده‌شده) بر حساسیت پاسخ تأکید می‌کند. این یافته‌ها علاوه بر توضیح مکانیزم‌های حاکم بر رفتار دینامیکی-پلاستیک، می‌تواند به‌عنوان راهنمایی عملی برای اولویت‌دهی پارامترهای طراحی، کنترل فرآیند و سیاست‌گذاری آزمایش/شبیه‌سازی به کار رود. در عین حال، با توجه به ماهیت غیرخطی مسئله، تصریح شد که تحلیل حساسیت محلی عمدتاً برای رتبه‌بندی و تفسیر مکانیزم در محدوده داده‌های پوشش داده‌شده مناسب است و روش‌های حساسیت سراسری به‌عنوان گزینه‌های مکمل برای تعمیم تحلیل در کل فضای ورودی‌ها (و کمی‌سازی تعاملات مرتبه بالاتر) قابل توصیه‌اند و می‌توانند در توسعه‌های آینده به کار گرفته شوند.

به‌منظور افزایش اتکاپذیری نتیجه‌گیری‌ها، تحلیل خطا، عدم قطعیت و پایداری/مقاومت نیز به‌صورت نظام‌مند گزارش شد. نتایج نشان داد توزیع باقی‌مانده‌ها رفتار تقریباً نرمال دارد و آزمون‌های نرمالیتی به‌طور شفاف ارائه شد. علاوه بر آن، گزارش عرض باند عدم قطعیت پایین (حدود

۰/۲۱۶۷) و همچنین فراوانی تجمعی بالا (حدود ۹۴٪ پیش‌بینی‌ها با خطای کمتر از ۲۰٪ (مؤید آن است که مدل نه‌تنها دقیق است، بلکه از منظر اعتمادپذیری نیز عملکرد پایداری ارائه می‌دهد. تکمیل این بخش با جدول‌های منظم و گزارش‌های آماری، ادعای تحلیل عدم قطعیت را به‌صورت عملکردمحور و در سطح پیش‌بینی‌ها/خطاها پشتیبانی می‌کند و نشان می‌دهد نتیجه‌گیری‌های ارائه‌شده صرفاً به یک نمونه یا چند نقطه خاص وابسته نیست.

با وجود این مزایا، برخی محدودیت‌ها و مسیرهای بهبود نیز قابل طرح است. نخست، همان‌طور که در تحلیل خطا آشکار شد، در نواحی با مقدار خروجی پایین، احتمال حساسیت بیشتر به نقاط پرت یا کمبود پوشش داده‌ای وجود دارد؛ لذا افزایش داده در این نواحی یا طراحی آزمایش هدفمند می‌تواند به یکنواخت‌تر شدن دقت در کل دامنه پاسخ کمک کند. دوم، گسترش مدل به مواد پیچیده‌تر (مثلاً رفتارهای غیرایزوتروپ، وابستگی‌های دمایی یا پدیده‌های آسیب) نیازمند داده‌های غنی‌تر و احتمالاً تلفیق قیود فیزیکی در مدل‌سازی است. در این راستا، ادغام رویکردهای پیشرفته مانند شبکه‌های عصبی فیزیک‌آگاه یا یادگیری هیبرید داده-فیزیک می‌تواند به کاهش نیاز داده و افزایش قابلیت تعمیم کمک کند.

در نهایت، این پژوهش نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی با حفظ دقت بالا و کاهش چشمگیر هزینه محاسباتی (تا سطحی قابل مقایسه با کاهش‌های گزارش‌شده در ادبیات برای مدل‌های جانشین)، مسیر مناسبی برای کاهش وابستگی به شبیه‌سازی‌های سنگین و گسترش امکان تحلیل‌های طراحی فراهم می‌کند. بر این اساس پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آینده، چارچوب حاضر به سمت موارد زیر حرکت کند:

- ۱) اجرای کامل تحلیل حساسیت سراسری برای تعمیم نتایج در کل فضای ورودی‌ها
- ۲) بررسی بارگذاری‌های چندمرحله‌ای و مسیرهای بارگذاری پیچیده‌تر
- ۳) توسعه برای مواد کامپوزیتی یا سازه‌های چندلایه
- ۴) ادغام با چارچوب‌های تصمیم‌گیری یا شبیه‌سازی‌های نزدیک به زمان واقعی گسترش

- Materials: Design and Applications*, 234(2), 231-245. <https://doi.org/10.1177/1464420716654195>
- Babaei, H., Mirzababaie Mostofi, T., & Alitavoli, M. (2017a). Experimental and theoretical study of large deformation of rectangular plates subjected to water hammer shock loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 231(3), 490-496. <https://doi.org/10.1177/0954408915611055>
- Babaei, H., Mirzababaie Mostofi, T., & Armoudli, E. (2017b). On dimensionless numbers for the dynamic plastic response of quadrangular mild steel plates subjected to localized and uniform impulsive loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 231(5), 939-950. <https://doi.org/10.1177/0954408916650713>
- Babaei, H., Mostofi, T. M., & Alitavoli, M. (2015a). Study on the response of circular thin plate under low velocity impact. *Geomechanics & Engineering*, 9(2), 207-218. <https://doi.org/10.12989/gae.2015.9.2.207>
- Babaei, H., Mostofi, T. M., Alitavoli, M., & Namdari, M. (2015b). Experimental investigation and a model presentation for predicting the behavior of metal and alumina powder compaction under impact loading. *Journal of Modares Mechanical Engineering*, 15(5), 357-366. <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.10275940.1394.15.5.36.0>
- Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B., & Elkhodary, K. (2014). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & sons.
- Bessa, M. A., Bostanabad, R., Liu, Z., Hu, A., Apley, D. W., Brinson, C., ... & Liu, W. K. (2017). A framework for data-driven analysis of materials under uncertainty: Countering the curse of dimensionality. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 320, 633-667. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.03.037>
- Bostanabad, R., Zhang, Y., Li, X., Kearney, T., Brinson, L. C., Apley, D. W., ... & Chen, W. (2018). Computational microstructure characterization and reconstruction: Review of the state-of-the-art techniques. *Progress in Materials Science*, 95, 1-41. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2018.01.005>
- Cheng, L., Guo, H., Sun, L., Yang, C., Sun, F., & Li, J. (2024). Real-time simulation of tube hydroforming by integrating finite-element method and machine learning. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 8(4), 175. <https://doi.org/10.3390/jmmp8040175>
- Fakhrusy, M., & Rosalia, C. A. (2025). Data-driven machine learning techniques for crashworthiness analysis of thin-walled structures: A review. In *E3S Web of Conferences* (Vol. 664, p. 01014). EDP Sciences. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202566401014>

یابد تا دامنه کاربرد صنعتی آن در حوزه‌هایی نظیر خودرو، هوافضا و دفاعی تقویت شود.

## مشارکت‌های نویسندگان

**مسعود ولی دوست:** تهیه پیش‌نویس خطی، بررسی ادبیات نظری و پیشینه مرتبط، روش‌شناسی پژوهش؛  
**توحید میرزبابای مستوفی:** تهیه پیش‌نویس خطی، مدل مفهومی پژوهش، روش‌شناسی پژوهش، بازنگری اولیه گزارش، تجزیه و تحلیل داده‌ها، پیش‌نویس تحلیل آماری، بازبینی متن، راهنمایی؛  
**محمد وهاب موسوی:** تجزیه و تحلیل داده‌ها، پیش‌نویس تحلیل آماری، بازبینی متن، راهنمایی؛  
**هاشم بابایی:** مدل مفهومی پژوهش، راهنمایی.

## تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ‌گونه تضاد منافع مرتبط با تحقیق حاضر ندارند و نتایج به صورت بی طرفانه و بدون دخالت منافع شخصی یا حرفه‌ای به دست آمده است.

## قدردانی

نویسندگان از عوامل اجرایی نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری و همچنین داوران محترم که کیفیت این مقاله را افزایش دادند، قدردانی می‌نمایند.

## مراجع

- Azarhoosh, Z., & Ghazaan, M. I. (2025). A review of recent advances in surrogate models for uncertainty quantification of high-dimensional engineering applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 433, 117508. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2024.117508>
- Babaei, H., & Mirzababaie Mostofi, T. (2020a). Modeling and prediction of fatigue life in composite materials by using singular value decomposition method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 234(2), 246-254. <https://doi.org/10.1177/1464420716660875>
- Babaei, H., & Mirzababaie Mostofi, T. (2020b). New dimensionless numbers for deformation of circular mild steel plates with large strains as a result of localized and uniform impulsive loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of*

- Mechanics*, 9(2), 15-29.  
<https://doi.org/10.22044/jsfm.2019.7816.2778>
- Mirzababaie Mostofi, T., & Babaei, H. (2019b). Plastic deformation of polymeric-coated aluminum plates subjected to gas mixture detonation loading: Part I: Experimental studies. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 9(1), 71-83.  
<https://doi.org/10.22044/jsfm.2019.7815.2777>
- Mirzababaie Mostofi, T., Sayah Badkhor, M., & Ghasemi, E. (2019c). Experimental investigation and optimal analysis of the high-velocity forming process of bilayer plates. *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 9(3), 65-80.  
<https://doi.org/10.22044/jsfm.2019.8586.2953>
- Mostofi, T. M., Babaei, H., & Alitavoli, M. (2017). The influence of gas mixture detonation loads on large plastic deformation of thin quadrangular plates: Experimental investigation and empirical modelling. *Thin-Walled Structures*, 118, 1-11.  
<https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.04.031>
- Mousavi, M. V., & Khoramishad, H. (2019). The effect of hybridization on high-velocity impact response of carbon fiber-reinforced polymer composites using finite element modeling, Taguchi method and artificial neural network. *Aerospace Science and Technology*, 94, 105393.  
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105393>
- Pei, Y., Han, B., Kumar, D., Adams, S., Khoo, S. Y., Norton, M., & Kouzani, A. Z. (2025). Machine Learning as a Surrogate for FEM: Predicting Mechanical Properties of Tyres. *Advanced Industrial and Engineering Polymer Research*, 8(4), 499-515.  
<https://doi.org/10.1016/j.aiepr.2025.08.003>
- Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686-707.  
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- Rezasefat, M., Mirzababaie Mostofi, T., Babaei, H., Ziya-Shamami, M., & Alitavoli, M. (2019). Dynamic plastic response of double-layered circular metallic plates due to localized impulsive loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 233(7), 1449-1471.  
<https://doi.org/10.1177/1464420718760640>
- Rokhy, H., & Mostofi, T. M. (2023). Tracking the explosion characteristics of the hydrogen-air mixture near a concrete barrier wall using CESE IBM FSI solver in LS-DYNA incorporating the reduced chemical kinetic model. *International Journal of Impact Engineering*, 172, 104401.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2022.104401>
- Ghaboussi, J., Garrett Jr, J. H., & Wu, X. (1991). Knowledge-based modeling of material behavior with neural networks. *Journal of engineering mechanics*, 117(1), 132-153.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1991\)117:1\(132\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:1(132))
- Haghgoo, M., Babaei, H., & Mostofi, T. M. (2022). 3D numerical investigation of the detonation wave propagation influence on the triangular plate deformation using finite rate chemistry model of LS-DYNA CESE method. *International Journal of Impact Engineering*, 161, 104108.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2021.104108>
- Hashemi, A., Jang, J., & Beheshti, J. (2023). A machine learning-based surrogate finite element model for estimating dynamic response of mechanical systems. *IEEE Access*, 11, 54509-54525.  
<https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3282453>
- Jamali, A., Babaei, H., Nariman-Zadeh, N., Ashraf Talesh, S. H., & Mirzababaie Mostofi, T. (2020). Multi-objective optimum design of ANFIS for modelling and prediction of deformation of thin plates subjected to hydrodynamic impact loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 234(3), 368-378.  
<https://doi.org/10.1177/1464420716660332>
- Lechner, P., Scandola, L., Maier, D., Hartmann, C., Rizaiev, Y., & Lieb, M. (2025). A physically-informed machine learning model for freeform bending. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 36(6), 4351-4363.  
<https://doi.org/10.1007/s10845-024-02452-w>
- Li, X., Li, Z., Chen, Y., & Zhang, C. (2023). An enhanced data-driven constitutive model for predicting strain-rate and temperature dependent mechanical response of elastoplastic materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 100, 104996.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.104996>
- Liang, R., Tang, X., Huang, J., Bastien, C., Zhang, C., & Tuo, W. (2024). A machine learning-based crashworthiness optimization for a novel pine cone-inspired multi-cell tubes under bending. *Heliyon*, 10(18), e37828.  
<https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e37828>
- Marković, E., Marohnić, T., & Basan, R. (2025). A Surrogate Artificial Neural Network Model for Estimating the Fatigue Life of Steel Components Based on Finite Element Simulations. *Materials*, 18(12), 2756.  
<https://doi.org/10.3390/ma18122756>
- Mirzababaie Mostofi, T., & Babaei, H. (2019a). Plastic deformation of polymeric-coated aluminum plates subjected to gas mixture detonation loading: Part II: Analytical and empirical modelling. *Journal of Solid and Fluid*

- Stoffel, M., Bamer, F., & Markert, B. (2018). Artificial neural networks and intelligent finite elements in non-linear structural mechanics. *Thin-Walled Structures*, 131, 102-106. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.06.035>
- Tasdemir, B., Pellegrino, A., Su, X., & Tagarielli, V. L. (2025). Learning the non-proportional multiaxial elastic-plastic response of an aluminium alloy with neural networks. *Materials & Design*, 253, 113956. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2025.113956>
- Yong, P. A. N. G., Zhang, S., Liang, P., Muchen, W. A. N. G., Zhuangzhuang, G. O. N. G., Xueguan, S. O. N. G., & Ziyun, K. A. N. (2024). Surrogate model uncertainty quantification for active learning reliability analysis. *Chinese Journal of Aeronautics*, 37(12), 55-70. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2024.08.055>
- Zamani, J., Mousavi, M. V., & Khalili, S. M. R. (2015). Numerical investigation of formation of Mach reflection in explosive free forming of confined cylindrical shells. *Modares Mechanical Engineering*, 14(13), 131-142. <https://dor.isc.ac/dor/20.1001.1.10275940.1393.14.13.36.9>