

Simultaneous Monitoring of Multivariate Process Mean Vector and Covariance Matrix with Limited Phase I Reference Observations Using Multivariate GLR and Maximum Control Charts

Fezzeh Abanavaz Kordehmahin¹, Mohammad Reza Maleki^{2,*}, Hossein Eghbali³

¹ Ph.D. Student, Department of Industrial Engineering, University of Eyvanekey, Eyvanekey, Iran

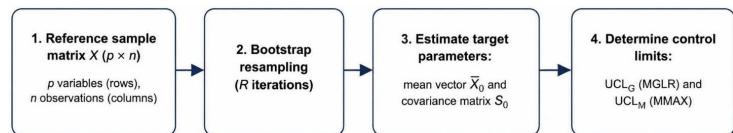
² Assistant Professor, Industrial Engineering Group, Golpayegan College of Engineering, Isfahan University of Technology, Golpayegan, Iran

³ Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, University of Eyvanekey, Eyvanekey, Iran

HIGHLIGHTS

- Developing a bootstrap-based algorithm to estimate the mean vector and covariance matrix using a single reference sample.
- Computing the control limits of multivariate generalized likelihood ratio and multivariate maximum charts based on a single reference sample.
- Designing Phase II approaches to assess the effect of parameter estimation error on run-length properties of the proposed simultaneous monitoring methods.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 7 April 2026

Revised: 17 May 2026

Accepted: 30 May 2026

Available online: 30 May 2026

*Correspondence: m.maleki@iut.ac.ir

How to cite this article:

Kordehmahin, F. A., Maleki, M. R., & Eghbali, H. (2026). Simultaneous monitoring of multivariate process mean vector and covariance matrix with limited phase I reference observations using multivariate GLR and maximum control charts. *System Engineering and Productivity*, 6 (4), 133-158.

Keywords:

Mean Vector

Covariance Matrix

Multivariate Maximum

Multivariate Generalized Likelihood Ratio

Bootstrap Method

ABSTRACT

In many real-world applications of statistical quality control, product quality is described by multiple correlated quality characteristics, where the occurrence of an assignable cause often leads to simultaneous changes in process mean vector and the covariance matrix. On the other hand, in Phase I analysis, due to reasons such as high sampling costs, limited time during process start-up, and short-run or customized production, a sufficient number of reference samples for estimating distribution parameters and determining control limits is often unavailable. Therefore, this paper focuses on simultaneous monitoring of mean vector and the covariance matrix under the condition that only a single reference sample is available in Phase I. To this end, a bootstrap-based algorithm is first developed to estimate the mean vector, the covariance matrix, and the control limits of the multivariate generalized likelihood ratio (MGLR) and the multivariate maximum charts in Phase I. Subsequently, online Phase II approaches are designed to evaluate the effect of estimation errors on the performance of the mentioned control charts. The results of extensive Monte Carlo simulations show that the proposed bootstrap algorithm provides accurate estimates of the distribution parameters and control limits despite relying on only a single reference sample. The findings also indicate that as the number of bootstrap samples increases, the indices related to the accuracy of parameter estimation gradually move closer to their target values. Furthermore, the analysis of the average run length (ARL), standard deviation of run length (SDRL), and median run length (MRL) under different shift scenarios demonstrates that estimation error affects the performance of both the multivariate generalized likelihood ratio and the multivariate maximum charts in Phase II.

1. Introduction

In industrial and service environments, product quality is typically described by a set of correlated quality characteristics. Monitoring each variable independently not only ignores the underlying correlation structure but also inflates the false alarm rate and reduces the charts' sensitivity to process disturbances. Moreover, in practice, the occurrence of assignable causes often induces concurrent changes in both the mean vector and the covariance matrix. Therefore, the design of joint monitoring schemes for the mean vector and covariance matrix is crucial for ensuring the rapid detection of process deviations in multivariate settings. For further information on statistical methods for simultaneous monitoring of the mean and variability, readers are referred to Maleki et al., 2023; Noor-ul-Amin et al., 2019; Saemian et al., 2023; Sharafi et al., 2022; Chatterjee et al., 2023; Teoh et al., 2025.

A significant challenge in many practical applications of statistical process control is the insufficient availability of reference observations in Phase I, which frequently leads to biased parameter estimation and, consequently, unreliable control limits. In this context, the bootstrap approach serves as an effective tool for parameter estimation and establishing control limits, primarily due to its distribution-free property and relatively low computational requirements. For further information on bootstrap-based control charts, readers are referred to Al-Lami et al., 2025; Chaing et al., 2018; Leiva et al., 2023; Modok et al., 2026; Panda & Wang, 2025; Perdana et al., 2025; and Najafzadeh et al., 2026.

Despite considerable progress in the joint monitoring of location and dispersion parameters across both univariate and multivariate domains, two critical research gaps still exist in the literature. First, while most prior research has emphasized the detection of shifts in the mean vector, the concurrent monitoring of both location and dispersion in multivariate processes has received comparatively less attention. Second, although the bootstrap has proven effective in univariate process monitoring, the adoption of this technique for designing multivariate control charts remains relatively underexplored. To address these shortcomings, this study, under the restrictive condition of having only a single reference sample in Phase I, pursues two main objectives: (1) developing bootstrap-based algorithms for estimating the mean vector, covariance matrix, and control limits of both multivariate maximum (MMAX) and multivariate generalized likelihood ratio (MGLR) charts; and (2) evaluating the impact of parameter estimation error on the sensitivity of these charts in Phase II.

2. Methodology

In this section, a bootstrap-based algorithm is described for estimating the mean vector and

covariance matrix, and for establishing the upper control limits of the MGLR and MMAX control charts, under the restrictive condition of a single reference sample in Phase I. Furthermore, the proposed procedure for evaluating the impact of parameter estimation error on the performance of these control charts is presented.

To estimate the distribution parameters and establish the upper control limit of the multivariate generalized likelihood ratio (MGLR) chart, a reference sample of size n is collected in the first step. In the second step, the iteration index for the proposed Phase I bootstrap algorithm is set to $r = 1$. In the third step, n random integers with replacement are generated from the discrete uniform distribution $\{1, 2, \dots, n\}$ and stored in a row vector \mathbf{b}_r . In the fourth step, the elements of \mathbf{b}_r are arranged in ascending order to form the vector \mathbf{b}'_r . In Step 5, the transformed observation matrix corresponding for the r^{th} bootstrap iteration, denoted by \mathbf{X}_r^* , is constructed based on the elements of vector \mathbf{b}'_r . In Step 6, the sample mean vector for the r^{th} bootstrap iteration, denoted as $\bar{\mathbf{x}}_r^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{j,r}^* = (\bar{x}_{1,r}^*, \bar{x}_{2,r}^*, \dots, \bar{x}_{p,r}^*)^T$, is calculated, where $\mathbf{x}_{j,r}^* = (x_{1,j,r}^*, x_{2,j,r}^*, \dots, x_{p,j,r}^*)^T$ represents the j^{th} column of the matrix \mathbf{X}_r^* . In Step 7, the sample covariance matrix in the r^{th} bootstrap iteration is calculated as $\mathbf{S}_r^* = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_{j,r}^* - \bar{\mathbf{x}}_r^*)(\mathbf{x}_{j,r}^* - \bar{\mathbf{x}}_r^*)^T$, and subsequently, the iteration index r is increased by one. In Step 8, if the bootstrap iteration index is less than R , the process returns to Step 3; otherwise, the algorithm proceeds to Step 9. In Step 9, the target mean vector is calculated as the arithmetic mean of the vectors $\bar{\mathbf{x}}_1^*, \bar{\mathbf{x}}_2^*, \dots, \bar{\mathbf{x}}_R^*$ as $\bar{\mathbf{x}}^\circ = \frac{\sum_{r=1}^R \bar{\mathbf{x}}_r^*}{R}$. In Step 10, the target process covariance matrix is calculated based on estimated matrices $\mathbf{S}_1^*, \mathbf{S}_2^*, \dots, \mathbf{S}_R^*$ as $\mathbf{S}^\circ = \frac{\sum_{r=1}^R \mathbf{S}_r^*}{R}$. In Step 11, transformation $\mathbf{x}_{j,r}^{*\circ} = \mathbf{S}^{\circ^{-1/2}}(\mathbf{x}_{j,r}^* - \bar{\mathbf{x}}^\circ)$ is applied to the columns of the bootstrap samples $\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \dots, \mathbf{X}_R^*$. In Step 12, the sample mean vector and the sample covariance matrix of each standardized bootstrap sample are computed as $\bar{\mathbf{x}}_r^{*\circ} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{j,r}^{*\circ} = (\bar{x}_{1,r}^{*\circ}, \bar{x}_{2,r}^{*\circ}, \dots, \bar{x}_{p,r}^{*\circ})^T$ and $\mathbf{S}_r^{*\circ} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_{j,r}^{*\circ} - \bar{\mathbf{x}}_r^{*\circ})(\mathbf{x}_{j,r}^{*\circ} - \bar{\mathbf{x}}_r^{*\circ})^T$, respectively. In Step 13, the generalized likelihood ratio statistic for the r^{th} iteration is calculated as $LR_r^* = np \left(\frac{1}{p} \text{trace}(\mathbf{S}_r^{*\circ}) - \log(|\mathbf{S}_r^{*\circ}|)^{\frac{1}{p}} - 1 \right) + n \|\bar{\mathbf{x}}_r^{*\circ}\|^2$. In Step 14, the statistics $LR_1^*, LR_2^*, \dots, LR_R^*$ are stored in a vector, denoted as $\mathbf{u} = (LR_{(1)}^*, LR_{(2)}^*, \dots, LR_{(R)}^*)$, such that $LR_{(r)}^*$ represents the r^{th} ordered element of \mathbf{u} . Finally, in Step 15, the $R(1 - \alpha)^{\text{th}}$ element of vector \mathbf{u} is

selected as the upper control limit for the bootstrap-based MGLR chart and is denoted as UCL_G^* . The proposed algorithm for estimating the distribution parameters and calculating the UCL for the MMAX chart is outlined as follows: First, a reference sample of size n is collected in Phase I. In Step 2, the value of the bootstrap iteration is set to $r = 1$. In Step 3, n random integers are generated with replacement from a discrete uniform distribution within the range $\{1, 2, \dots, n\}$ and stored in a row vector \mathbf{b}_r . In Step 4, the elements of \mathbf{b}_r are sorted in ascending order to obtain the vector \mathbf{b}_r^* . In Step 5, the transformed matrix \mathbf{X}_r^* is constructed based on the elements of \mathbf{b}_r^* . In Step 6, the sample mean vector for the r^{th} bootstrap iteration is calculated as $\bar{\mathbf{x}}_r^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{j,r}^* = (\bar{x}_{1,r}^*, \bar{x}_{2,r}^*, \dots, \bar{x}_{p,r}^*)^T$. In Step 7, the sample covariance matrix for the r^{th} bootstrap iteration is calculated as $\mathbf{S}_r^* = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_{j,r}^* - \bar{\mathbf{x}}_r^*)(\mathbf{x}_{j,r}^* - \bar{\mathbf{x}}_r^*)^T$, and the iteration index r is incremented by one. In Step 8, if r is less than R , the algorithm returns to Step 3; otherwise, it proceeds to Step 9. In Step 9, the mean vector of quality characteristics is determined as $\bar{\mathbf{x}}^\circ = \frac{\sum_{r=1}^R \bar{\mathbf{x}}_r^*}{R}$, based on the arithmetic mean of the vectors $\bar{\mathbf{x}}_1^*, \bar{\mathbf{x}}_2^*, \dots, \bar{\mathbf{x}}_R^*$. In Step 10, the covariance matrix of quality characteristics is determined as $\mathbf{S}^\circ = \frac{\sum_{r=1}^R \mathbf{S}_r^*}{R}$ by calculating the arithmetic mean of the matrices $\mathbf{S}_1^*, \mathbf{S}_2^*, \dots, \mathbf{S}_R^*$. In Step 11, the T_r^{2*} statistic for each bootstrap sample is calculated as $T_r^{2*} = n(\bar{\mathbf{x}}_r^* - \bar{\mathbf{x}}^\circ)^T (\mathbf{S}^\circ)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_r^* - \bar{\mathbf{x}}^\circ)$ using the mean vector and covariance matrix derived from Steps 9 and 10. In Step 12, the W_r^* statistic for each bootstrap sample is computed according to the covariance matrix obtained in Step 10, as $W_r^* = \frac{(n-1)|\mathbf{S}_r^*|^{\frac{1}{p}}}{|\mathbf{S}^\circ|^{\frac{1}{p}}}$. In Step 13, the standardized mean statistic for each bootstrap sample is calculated as $M_r^* = \Phi^{-1}(H_p(T_r^{2*}))$. In Step 14, the standardized dispersion statistic for each bootstrap sample is calculated as $V_r^* = \Phi^{-1}(G_{(a,b)}(W_r^*))$. In Step 15, the multivariate maximum statistic for each bootstrap sample is calculated as $C_r^* = \max\{|M_r^*|, |V_r^*|\}$. In Step 16, the statistics $C_1^*, C_2^*, \dots, C_R^*$ are stored in a vector $\mathbf{v} = (C_{(1)}^*, C_{(2)}^*, \dots, C_{(R)}^*)$, where $C_{(r)}^*$ denotes the r^{th} element of \mathbf{v} . In Step 17, the $R(1 - \alpha)^{th}$ element of vector \mathbf{v} is selected as the upper control limit of the bootstrap-based multivariate maximum chart, denoted as UCL_M^* . Finally, Phase I yields the estimated mean vector $\bar{\mathbf{x}}^\circ$, the estimated covariance matrix \mathbf{S}° , and the control limits UCL_G^* and UCL_M^* . The implementation steps for the proposed multivariate generalized likelihood ratio chart in Phase II are as follows: In Step 1, the run length (RL) index is set to $RL = 1$. In Step 2, a sample of size n , denoted as $\mathbf{X}_{RL} = (\mathbf{x}_{RL,1}, \mathbf{x}_{RL,2}, \dots, \mathbf{x}_{RL,n})$, is

collected. In Step 3, the columns of \mathbf{X}_{RL} are transformed into multivariate standard normal observations using transformation $\mathbf{x}'_{RL,j} = \mathbf{S}^{\circ - \frac{1}{2}}(\mathbf{x}_{RL,j} - \bar{\mathbf{x}}^\circ)$. In Step 4, the mean vector of the transformed observations from Step 3 is calculated as $\bar{\mathbf{x}}'_{RL} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}'_{RL,j} = (\bar{x}'_{RL,1}, \bar{x}'_{RL,2}, \dots, \bar{x}'_{RL,p})^T$. In Step 5, the sample covariance matrix of the transformed observations is determined as $\mathbf{S}'_{RL} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}'_{RL,j} - \bar{\mathbf{x}}'_{RL})(\mathbf{x}'_{RL,j} - \bar{\mathbf{x}}'_{RL})^T$. In Step 6, the MGLR statistic is derived based on the outputs of Steps 4 and 5 as $LR_{RL} = np(a - \log g - 1) + n\|\bar{\mathbf{x}}'_{RL}\|^2$. In Step 7, the MGLR statistic for the RL^{th} sample is compared with the UCL_G^* . If $LR_{RL} < UCL_G^*$, RL is incremented by one; otherwise, the value of RL index is recorded. Steps 1 through 7 are repeated Q times, and the average, standard deviation, and median of the resulting RL values are reported. The implementation steps for the proposed MMAX control chart are as follows: In Step 1, the run length index is set to $RL = 1$. In Step 2, a random sample of size n is generated to form the $p \times n$ matrix of $\mathbf{X}_{RL} = (\mathbf{x}_{RL,1}, \mathbf{x}_{RL,2}, \dots, \mathbf{x}_{RL,n})$. In Step 3, the sample mean vector of matrix \mathbf{X}_{RL} is calculated as $\bar{\mathbf{x}}_{RL} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{RL,j} = (\bar{x}_{RL,1}, \bar{x}_{RL,2}, \dots, \bar{x}_{RL,p})^T$. In Step 4, the sample covariance matrix is computed as $\mathbf{S}_{RL} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_{RL,j} - \bar{\mathbf{x}}_{RL})(\mathbf{x}_{RL,j} - \bar{\mathbf{x}}_{RL})^T$. In Step 5, the mean statistic for the RL^{th} sample is determined as $T_{RL}^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_{RL} - \bar{\mathbf{x}}^\circ)^T (\mathbf{S}^\circ)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_{RL} - \bar{\mathbf{x}}^\circ)$. In Step 6, the dispersion statistic corresponding to the RL^{th} sample is calculated as $W_{RL} = \frac{(n-1)|\mathbf{S}_{RL}|^{\frac{1}{p}}}{|\mathbf{S}^\circ|^{\frac{1}{p}}}$. In Step 7, the standardized values of the mean and dispersion statistics are obtained as $M_{RL} = \Phi^{-1}(H_p(T_{RL}^2))$ and $V_{RL} = \Phi^{-1}(G_{(a,b)}(W_{RL}))$, respectively. In Step 8, the maximum statistic corresponding to the RL^{th} sample is determined as $C_{RL} = \max\{|M_{RL}|, |V_{RL}|\}$. In Step 9, the MMAX statistic is compared with the UCL_M^* . If $C_{RL} < UCL_M^*$, the run length index is incremented by one; otherwise, the value of RL is recorded. To evaluate the performance of the chart, the procedure (Steps 1–9) is replicated Q times, and the mean, standard deviation, and median of the resulting run lengths are recorded.

3. Results and Discussion

The Phase I results indicate that the proposed bootstrap algorithm, despite utilizing only a single reference sample, even when relying on a single reference sample, provides reliable estimates of the mean vector and covariance matrix. The index 'sum of absolute values of the estimated mean vector' with target value of 0, decreases from 1.3219 to 1.2815 as the number of bootstrap samples increases from 3 to

50, exhibiting a gradual downward trend, indicating a slight enhancement in the precision of the mean vector estimation. The index 'sum of all elements of the estimated covariance matrix' with target of 15 increases from 9.4586 to 10.7759 as the number of bootstrap iterations rise from 3 to 50. Despite the upward trend toward the target, the persistent gap at 50 iterations suggests that further resampling is necessary for precise covariance estimation. Furthermore, the index 'sum of the main diagonal elements of the estimated covariance matrix' with target value 5 shows a consistent upward trend, rising from 3.9289 (at 3 samples) to 4.2784 (at 50 samples). As expected, increasing the number of resamples stabilizes the variance estimates and drives them closer to their true target values.

In Phase II, the emphasis is placed on assessing the impact of estimation error on the *ARL* measure. For individual mean shifts, the Classical-Max chart consistently yields smaller *ARL* values than the Classical-MGLR chart. Specifically, the Classical-Max chart detects shifts approximately 10.59%, 48.18%, 60.70%, and 52.63% faster for $\delta = 0.25, 0.5, 0.75, 1$, respectively. While this difference is small for small shifts, it becomes substantially more evident as the shift magnitude increases. Under the scenario of a dispersion change (i.e., standard deviation disturbances), the Classical-Max chart also outperforms Classical-MGLR scheme for all values of ψ . The performance gap initially increases as the shift magnitude increases but subsequently decreases in larger shifts. Under concurrent shifts in both the mean and dispersion, the Classical-Max chart consistently yields a lower *ARL* compared to the Classical-MGLR scheme across all shift levels, with improvements ranging from 38.45% to 53.34%. This demonstrates the superiority of the MMAX chart in rapidly detecting both individual and concurrent shifts in mean and dispersion parameters. Besides, the results indicate that parameter estimation error increases both the *ARL* and *SDRL* indices for both control charts. For the Bootstrap-MGLR chart under individual mean shifts, the increase in *ARL* for shift magnitudes of 0.25, 0.5, 0.75, and 1.0 is 3.06%, 5.60%, 7.07%, and 9.22%, respectively. Under covariance matrix disturbances, the increase in *ARL* becomes considerably more tangible; for shift magnitudes of 1.1, 1.2, 1.3, and 1.5, the corresponding percentage increases are 3.75%, 5.85%, 8.96%, and 15.08%, respectively. This pattern indicates that, for small changes, the impact of parameter estimation error is limited; however, as the dispersion shifts become larger, additional variability induced by the bootstrap-based estimation error substantially reduces the detection capability of the MGLR chart. Furthermore, across all mean shift levels, the increase in the *ARL* index for the MMAX chart due to parameter estimation error ranges from 5.24% for $\delta = 0.25$ to 13.60% when $\delta = 1$. Under standard deviation shifts, this increase

ranges from 2.38% for a shift magnitude of 1.1 to 15.76% for a shift magnitude of 1.5. For concurrent shifts, the *ARL* of the bootstrap versions of both charts (MMGLR and MMAX) is larger than that of their classical counterparts across all shift levels; for the Bootstrap-MGLR chart, this increase is approximately between 4.5% and over 10%, while for the Bootstrap-Max chart it varies from 6.77% to 12.73%. Overall, the Phase II results indicate that parameter estimation error induced by the bootstrap procedure leads to an increase in *ARL* and *SDRL* and, consequently, a reduction in the sensitivity of both charts, particularly under larger shifts and dispersion disturbances. In addition, the MMAX chart exhibits higher detection power than the MMGLR chart in rapid identification of mean shifts, dispersion shifts, and joint shifts, both in the absence and presence of parameter estimation error.

4. Conclusions

This study aimed to address the challenges of limited reference data in Phase I by developing a bootstrap-based algorithm for parameter estimation and control limit establishment for two well-known schemes for concurrent monitoring, namely the MGLR and MMAX control charts. Monte Carlo simulations demonstrated that the proposed approach achieves satisfactory accuracy in estimating the mean vector, covariance matrix, and control limits, despite relying on a single reference sample. Findings indicate that as the number of bootstrap samples increases, the estimators for the mean vector and covariance matrix converge gradually toward their target values; however, a larger number of bootstrap samples is recommended to achieve higher precision in estimating the components of the covariance matrix. Phase II analyses confirmed that parameter estimation error, resulting from data limitations in Phase I, degrades the detection performance of both control charts. Nevertheless, the MMAX chart maintains its superiority in the rapid detection of process disturbances, particularly under concurrent shifts in both the mean and dispersion. Finally, as this study assumes a constant process dimensionality, future research should explore adaptive strategies to identify out-of-control variables and dynamically update parameter estimates.

Funding

This research received no external funding.

Author contributions

Fezzeh Abanavaz Kordeh Mahin: Conceptual research model, Literature review and theoretical background, Data analysis, Statistical analysis draft, Drafting the manuscript, Preliminary review of the report, Research methodology development, Text revision; **Mohammad Reza Maleki:** Supervision,

Text revision; **Hossein Eghbali**: Supervision, Text revision.

Conflicts of interest

There are no conflicts of interest associated with this research.

Acknowledgments

We are grateful to all colleagues who provided insights and expertise that greatly assisted this research. We also thank the anonymous reviewers for their valuable suggestions to improve the paper.

References

- Al-Lami, M. A. H., Jabbari Khamnei, H., & Heydari, A. A. (2025). A parametric bootstrap control chart for Lindley Geometric percentiles. *Plos one*, 20(2), e0316449. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0316449>
- Chatterjee, K., Koukouvinos, C., & Lappa, A. (2023). A joint monitoring of the process mean and variance with a TEWMA-Max control chart. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 52(22), 8069-8095. <https://doi.org/10.1080/03610926.2022.2056748>
- Chiang, J. Y., Lio, Y. L., Ng, H. K. T., Tsai, T. R., & Li, T. (2018). Robust bootstrap control charts for percentiles based on model selection approaches. *Computers & Industrial Engineering*, 123, 119-133. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.06.012>
- Leiva, V., Santos, R. A. D., Saulo, H., Marchant, C., & Lio, Y. (2023). Bootstrap control charts for quantiles based on log-symmetric distributions with applications to the monitoring of reliability data. *Quality and Reliability Engineering International*, 39(1), 1-24. <https://doi.org/10.1002/qre.3072>
- Maleki, M. R., Salmasnia, A., & Yousefi, S. (2023). Multivariate ELR control chart with estimated mean vector and covariance matrix. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 52(24), 8814-8827. <https://doi.org/10.1080/03610926.2022.2076116>
- Modok, B., Kundu, A., & Chowdhury, S. (2026). Studentized bootstrap control chart for percentiles of truncated beta distributed environmental data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 40(3), 58. <https://doi.org/10.1007/s00477-026-03199-x>
- Najafzadeh, A., Mardan, E., Maleki, M. R., & Eghbali, H. (2026). Ridge-penalized likelihood ratio control chart for monitoring high-dimensional covariance matrix changes with limited reference data: a bootstrap-based approach. *International Journal of Management and Decision Making* (In Press).
- Noor-ul-Amin, M., Arif, F., & Hanif, M. (2019). Joint monitoring of mean and variance using likelihood ratio test statistic under pair ranked set sampling scheme. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43, 2449-2460. <https://doi.org/10.1007/s40995-019-00718-0>
- Panda, S., & Wang, M. (2025). Bootstrap-based control chart for percentiles of the generalized lognormal distribution with reliability applications. *Quality and Reliability Engineering International*, 41(4), 1329-1349. <https://doi.org/10.1002/qre.3722>
- Perdana, S. A., Mashuri, M., & Ahsan, M. (2025). Improved bootstrap \bar{X} control chart for non-normally distributed data. *MethodsX*, 14, 103190. <https://doi.org/10.1016/j.mex.2025.103190>
- Saemian, M., Maleki, M. R., & Salmasnia, A. (2023). Performance of Max-HEWMAMS control chart for simultaneous monitoring of process mean and variability in the presence of measurement errors. *International Journal of Applied Decision Sciences*, 16(2), 165-188. <https://doi.org/10.1504/IJADS.2023.129473>
- Sharafi, S., Maleki, M. R., Salmasnia, A., & Mansoor, R. (2022). The performance of max-GWMA control chart in the presence of measurement errors. *Management and Production Engineering Review*, 13. <https://doi.org/10.24425/mper.2022.142392>
- Teoh, J. W., Teoh, W. L., Hu, X., Tran, K. P., & Godase, D. G. (2025). A new omnibus SPRT chart for monitoring process mean and variability based on the average number of observations to signal. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 95(1), 49-69. <https://doi.org/10.1080/00949655.2024.2417253>

پایش هم‌زمان بردار میانگین و ماتریس کوواریانس فرآیندهای چندمتغیره با استفاده از نمودارهای نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و ماکزیمم چندمتغیره تحت مشاهدات مرجع محدود

فضه عبانواز کرده‌مهین^۱، محمدرضا ملکی^۲، حسین اقبالی^۳

^۱ دانشجوی دکتری، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه ایوان‌کی، ایوان‌کی، ایران

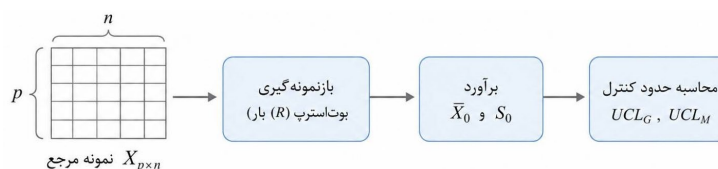
^۲ استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی گلپایگان، دانشگاه صنعتی اصفهان، گلپایگان، ایران

^۳ استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه ایوان‌کی، ایوان‌کی، ایران

برجسته‌ها

- توسعه الگوریتمی مبتنی بر بوت‌استرپ برای برآورد بردار میانگین و ماتریس کوواریانس با استفاده از یک نمونه مرجع.
- محاسبه حدود کنترل نمودارهای نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و ماکزیمم چندمتغیره با تکیه بر یک نمونه مرجع.
- طراحی رویکردهای فاز ۲ برای ارزیابی اثر خطای برآورد پارامترها بر ویژگی‌های طول دنباله روش‌های پایش هم‌زمان پیشنهادی.

چکیده گرافیکی



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۵/۰۱/۱۸

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۲/۲۷

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۰۹

ارائه برخط: ۱۴۰۵/۰۳/۰۹

*نویسنده مسئول:

m.maleki@iut.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

بردار میانگین
ماتریس کوواریانس
ماکزیمم چندمتغیره
نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره
روش بوت‌استرپ

چکیده

در بسیاری از کاربردهای واقعی کنترل کیفیت آماری، کیفیت محصول بر حسب چندین مشخصه کیفی همبسته توصیف شده جایی که وقوع عامل انحراف اغلب منجر به تغییرات توأم در بردار میانگین و ماتریس کوواریانس این مشخصه‌ها می‌شود. از سوی دیگر، در فاز ۱ به دلایلی نظیر هزینه‌های بالای نمونه‌گیری، محدودیت زمانی راه‌اندازی فرآیند و تولیدات کوتاه‌مدت یا سفارشی، معمولاً تعداد کافی نمونه‌های مرجع برای برآورد پارامترهای توزیع و تعیین حدود کنترل در دسترس نیست. از این رو، این مقاله برای پایش هم‌زمان بردار میانگین و ماتریس کوواریانس در شرایطی که تنها یک نمونه مرجع فاز ۱ در دسترس باشد تمرکز می‌کند. برای این منظور، ابتدا الگوریتمی مبتنی بر روش بوت‌استرپ توسعه می‌یابد که بردار میانگین، ماتریس کوواریانس و حدود کنترل دو نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و ماکزیمم چندمتغیره را در فاز ۱ تخمین می‌زند. سپس رویکردهای نظارت برخط در فاز ۲ طراحی می‌شوند تا اثر خطای تخمین پارامتر و حدود کنترل بر توان نمودارهای ذکر شده مورد ارزیابی قرار گیرد. نتایج شبیه‌سازی‌های گسترده مونت‌کارلو نشان می‌دهد که الگوریتم بوت‌استرپ پیشنهادی، با وجود تکیه بر یک نمونه مرجع، برآوردهای دقیقی از پارامترهای توزیع و حدود کنترل فراهم می‌کند. همچنین مشخص می‌شود که با افزایش تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ، شاخص‌های مرتبط با دقت برآورد پارامترها به تدریج به مقادیر هدف نزدیک‌تر می‌شوند. تحلیل شاخص‌های متوسط، انحراف معیار و میانه طول دنباله در سناریوهای مختلف تغییر نیز نشان می‌دهد که خطای تخمین بر عملکرد هر دو نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و ماکزیمم چندمتغیره در فاز ۲ اثرگذار است.

۱- مقدمه

در بسیاری از کاربردهای صنعتی و خدماتی، کیفیت محصول یا خروجی فرآیند تنها با یک مشخصه کیفی قابل توصیف نیست و به‌طور همزمان توسط چندین مشخصه همبسته سنجیده می‌شود. نادیده‌گرفتن ساختار همبستگی میان متغیرها و پایش جداگانه هر کدام می‌تواند منجر به افزایش نرخ هشدارهای اشتباه و همچنین کاهش توان نمودار در تشخیص تغییرات واقعی در فرآیند شود. از این رو، استفاده از نمودارهای کنترل چندمتغیره که قادر به در نظر گرفتن ساختار همبستگی بین مشخصه‌های کیفی باشند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. طراحی نمودارهای کنترل مناسب برای پایش همزمان این مشخصه‌های همبسته نه‌تنها موجب ارائه تصویری دقیق‌تر از وضعیت فرآیند می‌شود، بلکه امکان شناسایی سریع‌تر و مؤثرتر انحرافات از شرایط تحت کنترل را نیز فراهم می‌کند. از طرف دیگر، در واقعیت، وقوع انحراف بادلیل در خلال سیکل تولید ممکن است باعث تغییر همزمان در میانگین و پراکندگی مشخصه‌های کیفی تحت مطالعه شود. به عنوان مثال، در فرآیند ساخت مدارهای الکتریکی، موقعیت نامناسب یک شابلون می‌تواند منجر به تغییر در میانگین و واریانس ضخامت خمیر لحیم چاپ شده بر روی تخته‌های مدار شود. به علاوه، وقوع تغییر در واریانس مشخصه کیفی تحت مطالعه ممکن است بر حدود کنترل نمودار کنترل میانگین اثرگذار باشد. بنابراین توسعه رویکردهای نظارت برخط برای کشف توام اختلالات در پارامترهای تمرکز و مقیاس فرآیندهای چندمتغیره بسیار ضروری است. تکنیک‌های آماری چندمتغیره برای پایش همزمان پارامترهای تمرکز و مقیاس به‌طور کلی به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند. رویکردهای دسته اول از دو آماره جداگانه برای هر کدام از پارامترهای میانگین و پراکندگی استفاده می‌کنند که استفاده از این نوع طرح‌های کنترل به دلیل وجود محدودیت‌هایی، دیگر مورد توجه پژوهشگران کنترل کیفیت آماری نیست. نمودارهای کنترل دسته دوم از یک آماره منحصر به فرد برای پایش توام استفاده می‌کنند که این طرح‌های نظارت برخط نیز به نوبه خود به دو دسته تک‌آماره‌ای با حد کنترل سنتی و تک‌آماره‌ای با ناحیه

¹ Noor-ul-Amin² Lu³ Jaime⁴ Chatterjee

کنترل دو بعدی تقسیم‌بندی می‌شوند. در ادامه به برخی از مهم‌ترین روش‌های آماری نظارت توام اشاره می‌شود. ملکی و سلماس‌نیا در سال ۲۰۱۷ (Maleki & Salmasia, 2017) به توسعه یک نمودار کنترل ترکیبی مبتنی بر آماره‌های جمع تجمعی و نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته به منظور کشف سریع‌تر تغییرات توام در میانگین و انحراف معیار مشخصه کیفی نرمال پرداختند. نورالامین^۱ و همکاران در سال ۲۰۱۹ (Noor-ul-Amin et al., 2019) یک نمودار کنترل آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته برای پایش توام میانگین و واریانس فرآیند، با استفاده از روش نمونه‌گیری از مجموعه رتبه دار زوجی ارائه دادند. لو^۲ و همکاران در سال ۲۰۲۱ (Lu et al., 2021) یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون عمومی ماکزیمم مبتنی بر متغیر کمکی به منظور بهبود حساسیت نمودار در کشف هر دو دسته تغییرات افزایشی و کاهش‌ی در میانگین و/یا واریانس فرآیند توسعه دادند. جائیم^۳ و همکاران در سال ۲۰۲۱ (Jaime et al., 2021) به مطالعه خطای تخمین بر شاخص طول دنباله تحت کنترل و خارج از کنترل نمودارهای ترکیبی \bar{X}/S پرداختند. آن‌ها در ادامه به تعیین تعداد نمونه‌های فاز ۱ برای دستیابی به سطوح قابل قبول عملکرد نمودار \bar{X}/S در دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل پرداختند. صائیمیان و همکاران در سال ۲۰۲۳ (Saemian et al., 2023) به توسعه یک نمودار کنترل باحفظه مبتنی بر آماره میانگین متحرک موزون نمایی ترکیبی تحت عنوان نمودار Max-HEWMAMS برای کشف تغییرات همزمان در پارامترهای میانگین و واریانس مشخصه کیفی نرمال در حضور خطای اندازه‌گیری پرداختند. یک نمودار کنترل میانگین متحرک موزون نمایی ماکزیمم سه گانه برای ردیابی توام تغییرات میانگین و واریانس توسط چاترجی^۴ و همکاران در سال ۲۰۲۳ (Chatterjee et al., 2023) معرفی شد. پروین و همکاران در سال ۲۰۲۳ (Parvin et al., 2023) به توسعه دو نمودار کنترل تطبیقی مبتنی بر آماره میانگین متحرک موزون نمایی به منظور پایش همزمان میانگین و واریانس مشخصه کیفی نرمال تحت پارامترهای نامعلوم پرداختند.

نمودارهای کنترل کیفیت آماری استفاده شوند. یکی از مزایای مهم روش بوت‌استرپ این است که با مفروضاتی در مورد توزیع مشاهدات جمع‌آوری شده از فرآیند محدود نمی‌شود. به عبارت دیگر به منظور استفاده از روش بوت‌استرپ در طراحی نمودار کنترل تنها به دو مفروض پایداری فرآیند و مستقل بودن مشاهدات درون هر زیر گروه نیاز است. مزیت دوم استفاده از این روش آماری آن است که معمولاً از زمان محاسباتی نسبتاً کوتاهی برخوردار است. در واقع روش بوت‌استرپ تنها از داده‌های نمونه به منظور برآورد توزیع برآوردگر پارامتر و سپس محاسبه حدود کنترل مناسب نمودار استفاده می‌کند. در دهه اخیر، توجه روزافزونی به به‌کارگیری روش بوت‌استرپ در طراحی نمودارهای کنترل کیفیت آماری معطوف شده است؛ در ادامه به برخی از مقالات اخیر در این حوزه اشاره می‌شود:

مه‌پویا و همکاران در سال ۲۰۲۲ (Mahpouya et al., 2022) به طراحی نمودار کنترل استوار مربع تی تحت دو محدودیت عدم دسترسی به تعداد کافی مشاهدات مرجع و وجود داده‌های پرت پرداختند. ساه^۴ و همکاران در سال ۲۰۲۲ (Saha et al., 2022) به توسعه نمودارهای کنترل بوت‌استرپی برای کشف تغییرات صدکی در مشخصه کیفی لجستیک-نمایی پرداختند. ما^۵ و همکاران در سال ۲۰۲۲ (Ma et al., 2022) یک نمودار کنترل بوت‌استرپ استوار برای تشخیص تغییرات در چندک‌های توزیع لگ‌لجستیک ارائه کردند که در آن، مشخصه کیفی مورد پایش عمر محصول در نظر گرفته شده است. لیوا^۶ و همکاران در سال ۲۰۲۳ (Leiva et al., 2023) روشی مبتنی بر تکنیک بوت‌استرپ پارامتری برای پایش تغییر در چندک توزیع‌های متعلق به خانواده لگاریتمی متقارن ارائه نمودند. سعید و همکاران در سال ۲۰۲۴ (Saeed et al., 2024) به توسعه نمودار کنترل مبتنی بر روش بوت‌استرپ صدکی برای پایش تغییرپذیری فرآیند در شرایط وجود مشاهدات غیرنرمال پرداختند. پردانا^۷ و همکاران در سال ۲۰۲۵ (Perdana et al., 2025) به ارائه یک نمودار کنترل \bar{X} بر اساس یک روش بوت‌استرپ

چاترجی و همکاران در سال ۲۰۲۴ (Chatterjee et al., 2024) یک آماره میانگین متحرک موزون عمومی (GWMA) ماکزیمم برای پایش هم‌زمان میانگین و واریانس فرآیند پیشنهاد دادند. آن‌ها توزیع طول دنباله نمودار کنترل پیشنهادی را با نمودارهای میانگین متحرک موزون نمایی ماکزیمم و میانگین متحرک موزون نمایی دوگانه ماکزیمم با استفاده از داده‌های واقعی و شبیه‌سازی مقایسه کردند. به منظور کسب اطلاعات بیشتر در زمینه رویکردهای پایش توام میانگین و پراکندگی به سلماس‌نیا و همکاران در سال ۲۰۱۸ (Salmasnia et al., 2018)، پورزرکشیان و همکاران در سال ۲۰۲۲ (Pourzarkeshian et al., 2022)، شرفی و همکاران در سال ۲۰۲۲ (Sharafi et al., 2022)، پری و ونگ^۱ در سال ۲۰۲۲ (Perry & Wang, 2022)، ملکی و همکاران در سال ۲۰۲۳ (Maleki et al., 2023)، ایجی و همکاران در سال ۲۰۲۵ (Iji et al., 2023)، تئوه^۲، همکاران در سال ۲۰۲۵ (Teoh et al., 2025) و قزوینی و همکاران در سال ۲۰۲۶ (Ghazvini et al., 2026) و همچنین مقالات مروری مک‌کراکن و چاکرابورتی^۳ در سال ۲۰۱۳ (McCracken & Chakraborti, 2013) و جلیل‌بال و همکاران در سال ۲۰۲۲ (Jalilibal et al., 2022) مراجعه شود.

موضوع مهم دیگر در کاربردهای واقعی کنترل کیفیت آماری آن است که نمودارهای کنترل معمولاً فرض می‌کنند که (۱) داده‌های جمع‌آوری شده از فرآیند از توزیع نرمال پیروی می‌کنند، (۲) پارامترهای توزیع مشخصه‌های کیفی تحت مطالعه بر اساس تعداد کافی مشاهدات مرجع در فاز ۱ برآورد شده‌اند. با این حال، در بسیاری از محیط‌های صنعتی و خدماتی، امکان جمع‌آوری تعداد کافی مشاهدات در خلال تجزیه و تحلیل فاز ۱ عملاً میسر نیست. همچنین زمانی که توزیع مشخصه‌های کیفی تحت نظارت نامعلوم یا غیرنرمال باشد، امکان برآورد پارامترهای توزیع مورد نظر و در نتیجه محاسبه حدود کنترل نمودار ممکن است با اریبی قابل توجهی توام باشد. در این شرایط، روش‌های محاسباتی مانند بوت‌استرپ پارامتری یا ناپارامتری، می‌توانند برای تعیین حدود کنترل

⁴ Saha

⁵ Ma

⁶ Leiva

⁷ Perdana

¹ Perry & Wang

² Teoh

³ McCracken & Chakraborti

چندمتغیره انجام شده است. به علاوه، به کارگیری روش بوت‌استرپ در طراحی تکنیک‌های آماری پایش همزمان میانگین و پراکندگی مورد غفلت واقع شده است. بنابراین در این مقاله طراحی دو رویکرد پایش همزمان بردار میانگین و ماتریس کوواریانس مبتنی بر روش بوت‌استرپ تحت محدودیت تنها یک نمونه مرجع مورد توجه قرار می‌گیرد. ساختار این مقاله به این صورت سازمان‌دهی شده است که: در بخش‌های ۲ و ۳ به ترتیب به معرفی نمودارهای کنترل نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و نمودار کنترل ماکزیمم چندمتغیره پرداخته می‌شود. بخش ۴ به طراحی الگوریتم مبتنی بر تکنیک بوت‌استرپ در فاز ۱ اختصاص یافته است که در آن، جزئیات الگوریتم برای هر دو نمودار مذکور به ترتیب در زیربخش‌های ۴-۱ و ۴-۲ ارائه می‌گردد. در بخش ۵، روش پیشنهادی برای طراحی نمودارهای کنترل پیشنهادی در فاز ۲ با در نظر گرفتن اثر خطای تخمین پارامترها بیان می‌شود. در بخش ۶ از طریق مثال عددی، ابتدا عملکرد الگوریتم پیشنهادی در تخمین پارامترها و تعیین حدود کنترل ارزیابی و سپس اثر تخمین پارامتر بر منحنی طول دنباله نمودارهای ذکر شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت بخش ۷ به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی اختصاص می‌یابد.

۲- نمودار کنترل نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره

فرآیندی را در نظر بگیرید که در آن کیفیت محصول بر حسب p مشخصه کیفی همبسته توصیف شده و از نمونه‌های n تایی برای نظارت توأم بر میانگین و پراکندگی فرآیند استفاده می‌شود. در این صورت ماتریس $p \times n$ بعدی حاوی مشاهدات اخذ شده در نمونه i ام به صورت $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ توصیف می‌شود که در آن $x_{ij} = (x_{i1j}, x_{i2j}, \dots, x_{ipj})^T$ نشان‌دهنده بردار ستونی p بعدی j امین مشاهده از نمونه i ام است. زمانی که فرآیند در حالت تحت کنترل باشد، فرض می‌شود که بردارهای $x_{ij}; j = 1, 2, \dots, n$ از توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین $1 \times p$ بعدی μ_{TC} و ماتریس کوواریانس $p \times p$ بعدی Σ_{TC} پیروی می‌کند که هر دو بر اساس تجزیه و تحلیل فاز ۱ معلوم هستند. فرض کنید وقوع عامل انحراف

بهبودیافته در مواجهه با داده‌های غیرنرمال پرداختند. آن‌ها حدود کنترل بالا و پایین نمودار پیشنهادی را با استفاده از روش بوت‌استرپ بهبودیافته به نحوی تعیین کردند تا مقدار مطلوب متوسط طول دنباله تحت کنترل حاصل شود. ال‌لامی^۱ و همکاران در سال ۲۰۲۵ (Al-Lami et al., 2025) به معرفی یک نمودار کنترل مبتنی بر تکنیک‌های بوت‌استرپ پارامتری برای پایش چندک‌های توزیع هندسی لیندلی پرداختند. پاندا و ونگ^۲ در سال ۲۰۲۵ (Panda & Wang, 2025) دو نمودار کنترل شامل نمودار مبتنی بر روش بوت‌استرپ تعمیم‌یافته و نمودار از نوع شوهارت بر اساس تقریب‌های نرمال برای پایش چندک‌های توزیع لوگ‌نرمال طراحی نمودند. آن‌ها عملکرد دو نمودار کنترل پیشنهادی را در حجم نمونه محدود با استفاده از شبیه‌سازی‌های گسترده مونت کارلو مقایسه و نشان دادند که نمودار کنترل بوت‌استرپ پیشنهادی به ازای هر دو شاخص متوسط طول دنباله (ARL) و انحراف معیار طول دنباله (SDRL) عملکرد بهتری نسبت به نمودار شوهارت دارد. به منظور کسب اطلاعات بیشتر به مراجع مهمی مانند چیانگ^۳ و همکاران در سال ۲۰۱۸ (Chiang et al., 2018)، دآندراده^۴ و همکاران در سال ۲۰۲۲ (de Andrade et al., 2022)، کیائو^۵ در سال ۲۰۲۵ (Qiao, 2025)، مودوک^۶ و همکاران در سال ۲۰۲۶ (Modok et al., 2026) و نجف‌زاده و همکاران در سال ۲۰۲۶ (Najafzadeh et al., 2026) مراجعه شود.

بر اساس مطالب عنوان شده، بخش عمده‌ای از تحقیقات پیشین در حوزه نمودارهای کنترل چندمتغیره بر ردیابی تغییرات در بردار میانگین مشخصه‌های کیفی متمرکز بوده است. این در حالی است که پایش همزمان پراکندگی فرآیند بخشی جدایی‌ناپذیر از اجرای موفق تکنیک‌های کنترل کیفیت آماری در صنایع مختلف بوده و بایستی در کنار بردار میانگین مدنظر قرار گیرد. از طرف دیگر، اگرچه روش بوت‌استرپ در پایش فرآیندهای تک‌متغیره کاربردهای فراوانی یافته است، اما تحقیقات اندکی در زمینه به‌کارگیری این روش در طراحی نمودارهای

¹ Al-Lami

² Panda & Wang

³ Chiang

⁴ de Andrade

⁵ Qiao

⁶ Modok

$$LR_i = np(a - \log g - 1) + n\|\bar{x}'_i\|^2 \quad (۶)$$

در رابطه بالا $a = \frac{\text{trace}(S_i)}{p}$ و $g = (|S'_i|)^{\frac{1}{p}}$ بوده به‌طوری‌که $\text{trace}(\cdot)$ عملگر مجموع عناصر قطری اصلی ماتریس و $|\cdot|$ عملگر دترمینان است. همچنین عملگر $\|\cdot\|$ فاصله اقلیدسی بردار را محاسبه می‌کند. در رابطه (۶)، مقدار $\|\bar{x}'_i\|^2$ منعکس‌کننده تغییرات بردار میانگین و $a - \log g$ منعکس‌کننده اختلالات پراکندگی هستند. بر اساس ژنگ^۱ و همکاران در سال ۲۰۱۰ (Zhang et al., 2010) زمانی که اندازه نمونه به سمت بی‌نهایت میل کند توزیع آماره نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره به توزیع مربع کای با $p(p+3)/2$ درجه آزادی نزدیک می‌شود. نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره تنها مقادیر مثبت را اختیار می‌کند و در نتیجه دارای حد کنترل بالا است. زمانی که $LR_i \geq UCL_G$ باشد، یک هشدار توسط نمودار صادر می‌شود. مقدار UCL_G با شبیه‌سازی به نحوی تعیین می‌شود که متوسط طول دنباله تحت کنترل برابر مقدار $ARL_{IC} = \frac{1}{\alpha}$ شود که α بیانگر احتمال خطای نوع ۱ است.

۳- نمودار کنترل ماکزیمم چندمتغیره

نمودار ماکزیمم چندمتغیره، ابتدا دو آماره جداگانه برای پایش فاز ۲ بردار میانگین و ماتریس کوواریانس فرآیند محاسبه می‌کند. سپس هر کدام از آماره‌ها به توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌شوند. در نهایت آماره ماکزیمم بر اساس بیشینه دو آماره استاندارد شده محاسبه می‌شود. به منظور کشف تغییرات تمرکز در نمونه i ام از آماره مربع تی به صورت رابطه (۷) استفاده می‌شود:

$$T_i^2 = n(\bar{x}_i - \mu_{IC})^T \Sigma_{IC}^{-1} (\bar{x}_i - \mu_{IC}) \quad (۷)$$

در رابطه بالا آماره T_i^2 از توزیع مربع کای با p درجه آزادی پیروی می‌کند. در روش ماکزیمم چند متغیره مورد استفاده در این مطالعه، برای پایش ماتریس کوواریانس فرآیند، از آماره‌های بهره گرفته شده است که نخستین بار توسط گنانادسیکان و گوپتا^۲ در سال ۱۹۷۰ (Gnanadesikan & Gupta, 1970) پیشنهاد شده و به صورت رابطه (۸) نوشته می‌شود:

در نمونه شماره τ باعث ایجاد انحراف در بردار میانگین و/یا ماتریس کوواریانس فرآیند شود. در این صورت برای نمونه‌های اخذ شده $i = 1, 2, \dots, \tau$ ، بردار مشاهدات $x_{ij}; j = 1, 2, \dots, n$ از توزیع نرمال چندمتغیره با پارامترهای $x_{ij} \sim MVN(\mu_{IC}, \Sigma_{IC})$ پیروی کرده، در حالی که برای نمونه‌های $i = \tau + 1, \tau + 2, \dots, T$ داریم $x_{ij} \sim MVN(\mu_{OC}, \Sigma_{OC})$ لازم به ذکر است که T بیانگر زمان کشف اختلال رخ داده در فرآیند بوده و $\mu_{IC} \neq \mu_{OC}$ و $\Sigma_{OC} \neq \Sigma_{IC}$ به ترتیب نشان‌دهنده بردار میانگین و ماتریس کوواریانس در حالت خارج از کنترل هستند. پایش هم‌زمان بردار میانگین و ماتریس کوواریانس فرآیند نرمال چندمتغیره معادل با انجام آزمون فرض زیر است:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_{IC} \text{ and } \Sigma = \Sigma_{IC} \\ H_1: \mu \neq \mu_{IC} \text{ or } \Sigma \neq \Sigma_{IC} \end{cases} \quad (۱)$$

به منظور انجام آزمون فرض بالا بر اساس تکنیک آماره نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره (MGLR)، ابتدا تبدیل (۲) بر روی بردار مشاهدات اخذ شده اعمال می‌شود:

$$x'_{ij} = \Sigma_{IC}^{-\frac{1}{2}} (x_{ij} - \mu_{IC}) \quad (۲)$$

در این صورت زمانی که فرآیند تحت کنترل باشد x'_{ij} از توزیع نرمال استاندارد p متغیره با بردار میانگین $\mu'_{IC} = \mathbf{0}_{p \times 1}$ و ماتریس کوواریانس $\Sigma'_{IC} = \mathbf{I}_p$ پیروی خواهد نمود. روشن است که آزمون فرض (۱) نیز تبدیل به آزمون زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mathbf{0}_{p \times 1} \text{ and } \Sigma = \mathbf{I}_p \\ H_1: \mu \neq \mathbf{0}_{p \times 1} \text{ or } \Sigma \neq \mathbf{I}_p \end{cases} \quad (۳)$$

بدین منظور ابتدا بردار میانگین و ماتریس کوواریانس نمونه‌ای برای زیر گروه i به صورت رابطه‌های (۴) و (۵) محاسبه می‌شوند:

$$\bar{x}'_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x'_{ij} = (\bar{x}'_{i1}, \bar{x}'_{i2}, \dots, \bar{x}'_{ip})^T \quad (۴)$$

$$S_i^* = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x'_{ij} - \bar{x}'_i)(x'_{ij} - \bar{x}'_i)^T \quad (۵)$$

در این صورت آماره نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره برای نمونه i به صورت رابطه (۶) محاسبه می‌شود:

¹ Zhang

² Gnanadesikan & Gupta

۴- طراحی الگوریتم مبتنی بر تکنیک بوت‌استرپ در فاز ۱

در این بخش الگوریتم مبتنی بر روش بوت‌استرپ به منظور تخمین بردار میانگین، ماتریس کوواریانس و محاسبه حد کنترل بالای نمودارهای نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و ماکزیمم چندمتغیره تحت محدودیت وجود تنها یک نمونه مرجع در فاز ۱ تشریح می‌شود.

۴-۱- الگوریتم فاز ۱ برای نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره

الگوریتم مبتنی بر روش بوت‌استرپ به منظور تخمین پارامترها و محاسبه حد کنترل بالای نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته بر اساس تنها یک نمونه مرجع دارای ۱۵ گام به صورت زیر است.

(۱) یک نمونه n تایی از فرآیند در خلال تجزیه و تحلیل

فاز ۱ به صورت ماتریس $p \times n$ بعدی

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ تهیه کنید به طوری که

$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj})^T$ نشان‌دهنده بردار ستونی

p بعدی j امین مشاهده است.

(۲) مقدار اولیه شمارنده تکرار الگوریتم بوت‌استرپ

پیشنهادی در فاز ۱ را برابر $r = 1$ قرار دهید.

(۳) n عدد تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته در بازه

$\{1, 2, \dots, n\}$ تولید کنید، به گونه‌ای که امکان انتخاب

تکراری اعداد تصادفی وجود داشته باشد. سپس اعداد

تصادفی تولید شده را در قالب یک بردار سطری

مانند b_r ذخیره کنید.

(۴) عناصر بردار b_r را به ترتیب صعودی مرتب کرده و

بردار حاصل را b'_r نام‌گذاری کنید.

(۵) از عناصر موجود در بردار b'_r به منظور انتخاب ستون

ماتریس تبدیل شده مشاهدات در تکرار r ام الگوریتم

بوت‌استرپ استفاده کرده و ماتریس X_r^* را به صورت

زیر تشکیل دهید.

$$X_r^* = \begin{pmatrix} x_{11,r}^* & x_{12,r}^* & \dots & x_{1n,r}^* \\ x_{21,r}^* & x_{22,r}^* & \dots & x_{2n,r}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1,r}^* & x_{p2,r}^* & \dots & x_{pn,r}^* \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$W_i = \frac{(n-1)|S_i|^{\frac{1}{p}}}{|\Sigma_{IC}|^{\frac{1}{p}}} \quad (8)$$

زمانی که $p \leq 2$ باشد، آماره W_i به طور دقیق از توزیع گاما با پارامترهای $\Gamma(a, b)$ پیروی می‌کند به نحوی که $a = \frac{p(n-p)}{2}$ پارامتر شکل و $b = \frac{2}{p} \left(1 - \frac{(p-1)(p-2)}{2n}\right)^{-\frac{1}{p}}$ پارامتر مقیاس هستند. لیکن در صورتی که $p > 2$ باشد توزیع ذکر شده به صورت مجانبی برقرار خواهد بود. از آنجا که پارامترهای توزیع گاما بایستی هر دو مثبت باشند، بنابراین روش فوق تنها برای حالت $n > p$ قابل استفاده بوده و زمانی که بعد مساله از اندازه نمونه فراتر رود، روش بالا دیگر قابل به کارگیری نخواهد داشت. همان طور که پیش‌تر عنوان شد، به منظور پایش همزمان بردار میانگین و ماتریس کوواریانس آماره‌های W_i و T_i^2 بایستی استاندارد شوند. برای این منظور، تبدیل‌های (۹) و (۱۰) به صورت زیر استفاده می‌شوند:

$$M_i = \Phi^{-1}(H_p(T_i^2)) \quad (9)$$

$$V_i = \Phi^{-1}(G_{(a,b)}(W_i)) \quad (10)$$

در روابط بالا $\Phi(\cdot)$ بیانگر تابع جمع‌ی توزیع نرمال استاندارد، $H_p(\cdot)$ نشان‌دهنده تابع جمع‌ی توزیع مربع کای با p درجه آزادی و $G_{a,b}(\cdot)$ بیانگر تابع جمع‌ی توزیع گاما با پارامترهای شکل و مقیاس a و b است. زمانی که فرآیند تحت کنترل باشد، آماره‌های M_i و V_i به صورت مستقل دارای توزیع نرمال استاندارد بوده و در نتیجه آماره ماکزیمم چندمتغیره به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$C_i = \max\{|M_i|, |V_i|\} \quad (11)$$

از آنجا که همواره $C_i \geq 0$ است، نمودار ماکزیمم چندمتغیره تنها دارای حد کنترل بالاست که با حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} P(C_i \leq UCL_G) &= P(\max\{|M_i|, |V_i|\} \leq UCL_G) \\ &= P(-UCL_G \leq M_i \leq UCL_G)P(-UCL_G \leq V_i \leq UCL_G) \\ &= (2\Phi(UCL_G) - 1)(2\Phi(UCL_G) - 1) \\ &= (2\Phi(UCL_G) - 1)^2 \\ &= 1 - \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

(۱۴) آماره‌های $LR_1^*, LR_2^*, \dots, LR_R^*$ را در بردای مانند $u = (LR_{(1)}^*, LR_{(2)}^*, \dots, LR_{(R)}^*)$ ذخیره کنید به طوری که $LR_{(r)}^*$ بیانگر r امین عنصر مرتب شده در بردار u است.

(۱۵) عنصر شماره $R(1 - \alpha)$ از بردار u را به عنوان حد کنترل بالای نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته مبتنی بر روش بوت‌استرپ انتخاب کرده و آن را با نماد UCL_G^* نام‌گذاری کنید.

۴-۲- الگوریتم فاز ۱ برای نمودار ماکزیمم چندمتغیره

الگوریتم مبتنی بر روش بوت‌استرپ برای محاسبه حد کنترل بالای نمودار ماکزیمم چندمتغیره، با تکیه بر تنها یک نمونه مرجع، در ۱۷ گام به صورت زیر بیان می‌شود:

(۱) یک نمونه n تایی در خلال فاز ۱ تهیه کرده و آن را به صورت ماتریس $p \times n$ بعدی $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ سازمان‌دهی کنید.

(۲) مقدار اولیه شمارنده تکرار در الگوریتم بوت‌استرپ پیشنهادی در فاز ۱ را برابر با $r = 1$ در نظر بگیرید.

(۳) تعداد n عدد تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته در بازه $\{1, 2, \dots, n\}$ تولید کنید، به گونه‌ای که انتخاب اعداد به صورت تکراری نیز امکان‌پذیر باشد. سپس اعداد تصادفی تولیدشده را در قالب یک بردار سطری با نماد b_r ذخیره کنید.

(۴) عناصر بردار b_r را به صورت صعودی مرتب کنید و بردار مرتب‌شده را با نماد b_r' نام‌گذاری کنید.

(۵) از عناصر موجود در b_r' برای انتخاب ستون‌های ماتریس مشاهدات تبدیل‌یافته در تکرار r ام الگوریتم بوت‌استرپ استفاده کرده و ماتریس X_r^* را مطابق رابطه (۱۳) تشکیل دهید.

(۶) بردار میانگین نمونه‌ای را در تکرار r ام الگوریتم به صورت زیر محاسبه کنید.

(۷) ماتریس کوواریانس نمونه‌ای را در تکرار r ام الگوریتم با استفاده از رابطه زیر محاسبه کنید، سپس مقدار شمارنده r را یک واحد افزایش دهید.

شمارنده r را یک واحد افزایش دهید.

شمارنده r را یک واحد افزایش دهید.

در رابطه (۱۳)، مقدار مشخصه k ام در j امین ستون ماتریس تبدیل شده مشاهدات در تکرار r ام الگوریتم است.

(۶) بردار میانگین نمونه‌ای در تکرار r ام الگوریتم بوت‌استرپی را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$\bar{x}_r^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{j,r}^* = (\bar{x}_{1,r}^*, \bar{x}_{2,r}^*, \dots, \bar{x}_{p,r}^*)^T \quad (14)$$

لازم به ذکر است که $x_{j,r}^* = (x_{1j,r}^*, x_{2j,r}^*, \dots, x_{pj,r}^*)^T$ نشان‌دهنده j امین ستون ماتریس X_r^* است.

(۷) ماتریس کوواریانس نمونه‌ای در تکرار r ام الگوریتم بوت‌استرپی را به صورت زیر محاسبه کرده، سپس شمارنده r را یک واحد اضافه کنید.

$$S_r^* = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{j,r}^* - \bar{x}_r^*)(x_{j,r}^* - \bar{x}_r^*)^T \quad (15)$$

(۸) در صورتی که شماره تکرار الگوریتم بوت‌استرپ کمتر از R باشد، فرآیند به مرحله سوم بازمی‌گردد؛ در غیر این صورت، اجرای الگوریتم به مرحله نهم منتقل خواهد شد.

(۹) بردار میانگین فرآیند را بر اساس میانگین حسابی بردارهای $\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_R^*$ به صورت $\bar{x}^* = \frac{\sum_{r=1}^R \bar{x}_r^*}{R}$ محاسبه کنید.

(۱۰) ماتریس کوواریانس فرآیند را بر اساس میانگین حسابی $S_1^*, S_2^*, \dots, S_R^*$ به صورت $S^* = \frac{\sum_{r=1}^R S_r^*}{R}$ محاسبه کنید.

(۱۱) تبدیل $x_{j,r}^* = S^{*-1/2}(x_{j,r}^* - \bar{x}^*)$ را بر روی ستون‌های نمونه‌های بوت‌استرپی $X_1^*, X_2^*, \dots, X_R^*$ اعمال کنید.

(۱۲) برای هر کدام از نمونه‌های بوت‌استرپی استاندارد شده، بردار میانگین نمونه‌ای و ماتریس کوواریانس نمونه‌ای را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$\bar{x}_r^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{j,r}^* = (\bar{x}_{1,r}^*, \bar{x}_{2,r}^*, \dots, \bar{x}_{p,r}^*)^T$$

$$S_r^* = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{j,r}^* - \bar{x}_r^*)(x_{j,r}^* - \bar{x}_r^*)^T$$

(۱۳) آماره نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته در تکرار r ام را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$LR_r^* = np \left(\frac{1}{p} \text{trace}(S_r^*) - \log(|S_r^*|)^{\frac{1}{p}} - 1 \right) + n \|\bar{x}_r^*\|^2$$

۵- نمودارهای کنترل پیشنهادی فاز ۲

بر اساس آخرین اطلاعات مولف، تکنیک‌های آماری پایش توام میانگین و پراکندگی فرآیندهای چندمتغیره بر این فرض استوار هستند که مولفه‌های بردار میانگین و ماتریس کوواریانس مشخصه‌های کیفی با وجود تعداد کافی نمونه‌های مرجع در فاز ۱ تخمین زده شده‌اند. این در حالی است که در عمل ممکن است دسترسی به تعداد کافی مشاهدات مرجع به دلیل محدودیت‌های مالی و زمانی و همچنین نرخ تولید پایین میسر نباشد. بنابراین بررسی اثر تخمین پارامتر بر منحنی طول دنباله نمودارهای کنترل کیفیت آماری بسیار حائز اهمیت است. در این بخش نحوه استخراج ویژگی‌های طول دنباله نمودارهای نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته چندمتغیره و ماکزیمم چندمتغیره با در نظر گرفتن خطای تخمین فاز ۱ تشریح می‌شود.

۵-۱- نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته با وجود اثر خطای تخمین پارامتر

گام‌های مورد نیاز نسخه چندمتغیره نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته پیشنهادی پیشنهادی به شرح زیر است:

(۱) مقدار طول دنباله نمودار کنترل را برابر $RL = 1$ قرار دهید.

(۲) یک نمونه تصادفی با حجم n تولید کرده و آن را در ماتریس $p \times n$ بعدی $X_{RL} = (x_{RL,1}, x_{RL,2}, \dots, x_{RL,n})$ مرتب کنید.

(۳) هر کدام از ستون‌های ماتریس مشاهدات اخذ شده را با استفاده از تبدیل $x'_{RL,j} = S^{\circ - \frac{1}{2}}(x_{RL,j} - \bar{x}^{\circ})$ به مشاهداتی با توزیع نرمال استاندارد چندمتغیره تبدیل کنید.

(۴) بردار میانگین مشاهدات تبدیل یافته گام ۳ را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$\bar{x}'_{RL} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x'_{RL,j} = (\bar{x}'_{RL,1}, \bar{x}'_{RL,2}, \dots, \bar{x}'_{RL,p})^T$$

(۵) ماتریس کوواریانس نمونه‌ای مشاهدات تبدیل یافته در گام ۳ را به صورت زیر تعیین کنید.

$$S'_{RL} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x'_{RL,j} - \bar{x}'_{RL})(x'_{RL,j} - \bar{x}'_{RL})^T$$

(۸) اگر شماره تکرار الگوریتم بوت‌استرپ کمتر از R باشد، الگوریتم مجدداً به گام ۳ باز می‌گردد؛ در غیر این صورت، اجرای آن به مرحله نهم منتقل می‌شود.

(۹) بردار میانگین مشخصه‌های کیفی را با استفاده از میانگین حسابی بردارهای $\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_R^*$ محاسبه کرده و آن را با نماد $\bar{x}^{\circ} = \frac{\sum_{r=1}^R \bar{x}_r^*}{R}$ نشان دهید.

(۱۰) ماتریس کوواریانس مشخصه‌های کیفی را با محاسبه میانگین حسابی ماتریس‌های $S_1^*, S_2^*, \dots, S_R^*$ به دست آورده و ماتریس حاصل را با نماد $S^{\circ} = \frac{\sum_{r=1}^R S_r^*}{R}$ نمایش دهید.

(۱۱) آماره $T_r^{2*}; r = 1, 2, \dots, R$ را برای هر یک از نمونه‌های بوت‌استرپی بر اساس بردار میانگین و ماتریس کوواریانس گام‌های ۹ و ۱۰ به صورت $T_r^{2*} = n(\bar{x}_r^* - \bar{x}^{\circ})^T (S^{\circ})^{-1} (\bar{x}_r^* - \bar{x}^{\circ})$ به دست آورید.

(۱۲) آماره $W_r^*; r = 1, 2, \dots, R$ را برای هر یک از نمونه‌های بوت‌استرپی بر اساس ماتریس کوواریانس حاصل از گام ۱۰ به صورت $W_r^* = \frac{(n-1)|S_r^{*p}|^{\frac{1}{p}}}{|S^{\circ p}|^{\frac{1}{p}}}$ به دست آورید.

(۱۳) آماره استاندارد شده میانگین را برای هر یک از نمونه‌های بوت‌استرپی به صورت $M_r^* = \Phi^{-1}(H_p(T_r^{2*}))$ محاسبه کنید.

(۱۴) آماره استاندارد شده پراکندگی را برای هر یک از نمونه‌های بوت‌استرپی را به صورت $V_r^* = \Phi^{-1}(G_{(a,b)}(W_r^*))$ محاسبه کنید.

(۱۵) آماره ماکزیمم چندمتغیره را برای هر یک از نمونه‌های بوت‌استرپی به صورت $C_r^* = \max\{|M_r^*|, |V_r^*|\}$ محاسبه کنید.

(۱۶) آماره‌های $C_1^*, C_2^*, \dots, C_R^*$ را در برداری مانند $v = (C_{(1)}^*, C_{(2)}^*, \dots, C_{(R)}^*)$ ذخیره کنید، به گونه‌ای که $C_{(r)}^*$ بیانگر r امین عنصر مرتب‌شده در بردار v است.

(۱۷) عنصر شماره $R(1 - \alpha)$ از بردار v را به عنوان حد کنترل بالای نمودار ماکزیمم چندمتغیره مبتنی بر روش بوت‌استرپ انتخاب کنید و آن را با نماد UCL_M^* مشخص کنید.

(۸) آماره ماکزیمم متناظر با نمونه شماره RL را به صورت $C_{RL} = \max\{|M_{RL}|, |V_{RL}|\}$ به دست آورید.

(۹) آماره ماکزیمم چند متغیره برای نمونه RL را با UCL_M^* مقایسه کنید. چنانچه $C_{RL} < UCL_M^*$ باشد، شمارنده RL را یک واحد اضافه کنید و در غیر اینصورت مقدار RL را ذخیره کنید. لازم به ذکر است که UCL_M^* حد کنترل بالای محاسبه شده توسط الگوریتم بوت‌استرپ پیشنهادی در گام ۱۷ بخش ۴-۲ است.

گام‌های ۱ تا ۹ را به تعداد Q بار تکرار کرده و متوسط، انحراف معیار و میانه مقادیر RL حاصل را محاسبه کنید.

۶- مثال عددی

۶-۱- ارزیابی عملکرد الگوریتم تخمین پارامترهای توزیع و حدود کنترل

در این بخش، به منظور ارزیابی کارایی روش بوت‌استرپ پیشنهادی، دقت این روش در برآورد بردار میانگین و ماتریس کوواریانس یک فرآیند چندمتغیره در شرایطی که در فاز ۱ تنها یک مشاهده مرجع از فرآیند در دسترس است مورد بررسی قرار می‌گیرد. افزون بر این، میزان دقت برآوردهای بردار میانگین و ماتریس پراکندگی نسبت به تعداد نمونه‌های بوت‌استرپی نیز تحلیل می‌شود. برای این منظور، فرآیندی در نظر گرفته می‌شود که وضعیت آن توسط $p = 5$ مشخصه کیفی نرمال توصیف می‌شود. بردار میانگین این مشخصه‌ها برابر با بردار ستونی صفر $\mu_{IC} = \mathbf{0}_{5 \times 1}$ فرض شده و ماتریس کوواریانس متناظر نیز مطابق زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\Sigma_{IC} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

همچنین اندازه نمونه در طراحی هر دو نمودار کنترل برابر با $n = 10$ در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۱، نتایج حاصل از به‌کارگیری الگوریتم پیشنهادی تخمین پارامتر، برای $R \in \{3, 5, 10, 20, 30, 50\}$ نمونه بوت‌استرپی ارائه شده است. این جدول شامل بردار میانگین برآوردشده، ماتریس کوواریانس برآوردشده، مجموع قدر مطلق عناصر بردار میانگین برآوردشده ($\|\hat{\bar{x}}\|_1$)، مجموع کل عناصر

(۶) بر اساس گام‌های ۴ و ۵، آماره نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$LR_{RL} = np(a - \log g - 1) + n\|\hat{\bar{x}}'_{RL}\|^2$$

(۷) مقدار آماره نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چند متغیره برای نمونه شماره RL را با UCL_G^* مقایسه کنید. چنانچه $LR_{RL} < UCL_G^*$ باشد شمارنده RL را یک واحد اضافه کنید و در غیر اینصورت مقدار RL را ذخیره کنید. لازم به ذکر است که UCL_G^* مقدار حد کنترل بالای محاسبه شده توسط الگوریتم بوت‌استرپ پیشنهادی در گام ۱۵ بخش ۴-۱ است.

گام‌های ۱ تا ۷ را به تعداد Q بار تکرار کرده و متوسط، انحراف معیار و میانه مقادیر RL را گزارش کنید.

۵-۲- نمودار ماکزیمم چندمتغیره با وجود اثر خطای تخمین پارامتر

گام‌های مورد نیاز برای پیاده‌سازی نسخه چندمتغیره نمودار ماکزیمم پیشنهادی پیشنهادی به شرح زیر است:

(۱) مقدار طول دنباله نمودار کنترل را برابر $RL = 1$ قرار دهید.

(۲) یک نمونه تصادفی با حجم n تولید کرده و آن را در ماتریس $p \times n$ بعدی $\mathbf{X}_{RL} = (\mathbf{x}_{RL,1}, \mathbf{x}_{RL,2}, \dots, \mathbf{x}_{RL,n})$ مرتب کنید.

(۳) بردار میانگین نمونه‌ای ماتریس \mathbf{X}_{RL} را به صورت $\bar{\mathbf{x}}_{RL} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{RL,j} = (\bar{x}_{RL,1}, \bar{x}_{RL,2}, \dots, \bar{x}_{RL,p})^T$ محاسبه کنید.

(۴) ماتریس کوواریانس نمونه‌ای \mathbf{X}_{RL} را به صورت $\mathbf{S}_{RL} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_{RL,j} - \bar{\mathbf{x}}_{RL})(\mathbf{x}_{RL,j} - \bar{\mathbf{x}}_{RL})^T$ به دست آورید.

(۵) آماره مربع تی نمونه شماره RL را برای بردار میانگین به صورت زیر تعیین کنید.

$$T_{RL}^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_{RL} - \bar{\mathbf{x}}^0)^T (\mathbf{S}^0)^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_{RL} - \bar{\mathbf{x}}^0)$$

(۶) آماره ماتریس کوواریانس متناظر با نمونه RL را به صورت $W_{RL} = \frac{(n-1)|\mathbf{S}_{RL}|^{\frac{1}{p}}}{|\mathbf{S}^0|^{\frac{1}{p}}}$ محاسبه کنید.

(۷) مقادیر استاندارد شده آماره‌های میانگین و پراکندگی را به ترتیب به صورت $M_{RL} = \Phi^{-1}(H_p(T_{RL}^2))$ و $V_{RL} = \Phi^{-1}(G_{(a,b)}(W_{RL}))$ به دست آورید.

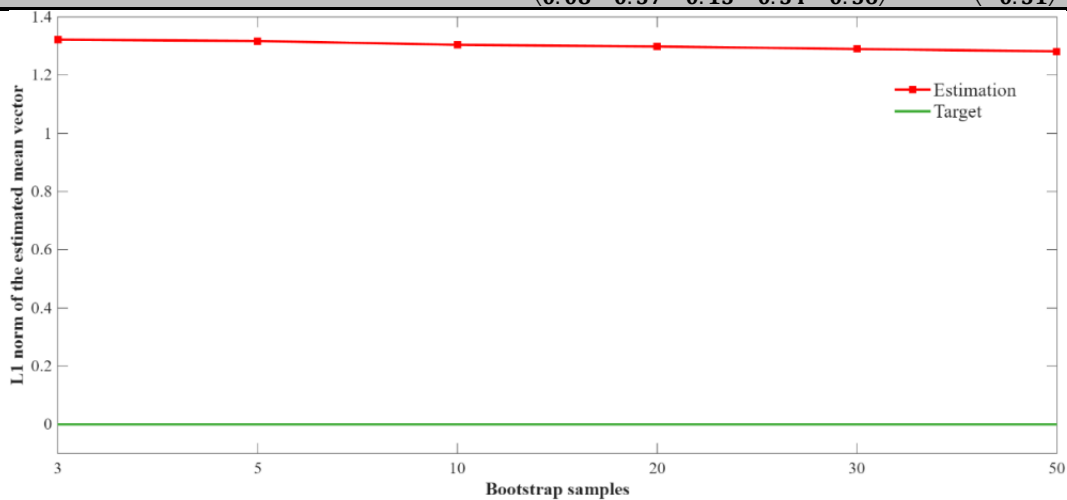
به منظور تشریح بهتر نتایج از شکل‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب برای نشان دادن شاخص‌های $\|\bar{x}^\circ\|_1$ ، $\text{Sum}(S^\circ)$ و $\text{Tr}(S^\circ)$ استفاده شده است.

ماتریس کوواریانس برآورد شده ($\text{Sum}(S^\circ)$)، و همچنین مجموع مؤلفه‌های قطر اصلی ماتریس کوواریانس برآورد شده ($\text{Tr}(S^\circ)$) است که تمامی آن‌ها بر اساس تکرار شبیه‌سازی در نرم‌افزار متلب محاسبه شده‌اند.

جدول ۱. نتایج حاصل الگوریتم بوت‌استرپ پیشنهادی به ازای تعداد نمونه‌های مختلف

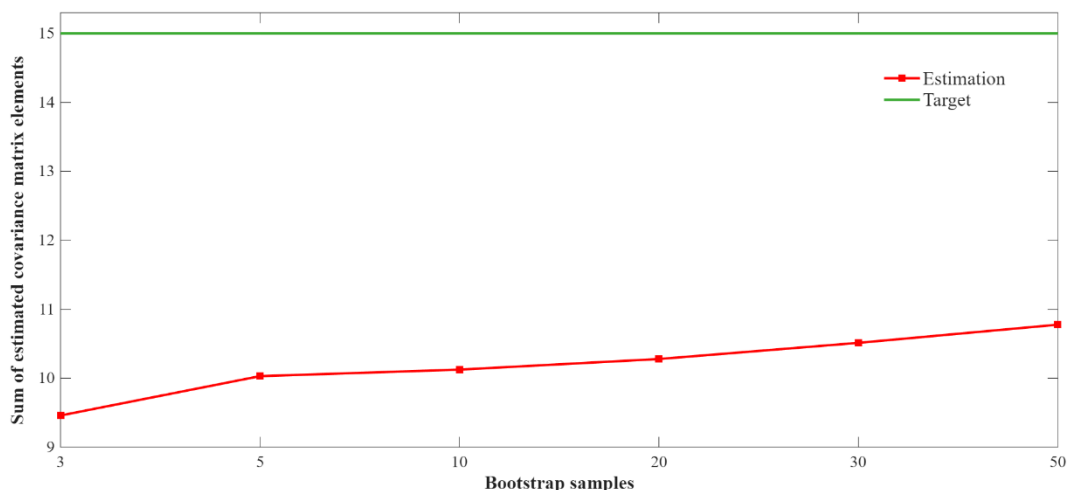
Table 1. Results of the proposed bootstrap algorithm for different sample sizes

$\text{Tr}(S^\circ)$	$\text{Sum}(S^\circ)$	$\ \bar{x}^\circ\ _1$	S°	\bar{x}°	R
۳/۹۲۸۹	۹/۴۵۸۶	۱/۳۲۱۹	$\begin{pmatrix} 0.81 & 0.22 & 0.35 & 0.26 & 0.20 \\ 0.22 & 1.25 & 0.33 & 0.13 & 0.40 \\ 0.35 & 0.33 & 0.31 & 0.31 & 0.03 \\ 0.26 & 0.13 & 0.31 & 0.99 & 0.54 \\ 0.20 & 0.40 & 0.03 & 0.54 & 0.58 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.17 \\ 0.12 \\ -0.46 \\ 0.23 \\ -0.34 \end{pmatrix}$	۳
۳/۹۳۴۸	۱۰/۰۲۹۳	۱/۳۱۷۱	$\begin{pmatrix} 0.85 & 0.23 & 0.31 & 0.64 & 0.11 \\ 0.23 & 1.06 & 0.20 & 0.37 & 0.46 \\ 0.31 & 0.20 & 0.57 & 0.25 & 0.03 \\ 0.64 & 0.37 & 0.25 & 0.88 & 0.44 \\ 0.11 & 0.46 & 0.03 & 0.44 & 0.58 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.10 \\ 0.22 \\ -0.37 \\ 0.27 \\ -0.35 \end{pmatrix}$	۵
۴/۰۱۳۷	۱۰/۱۲۴۰	۱/۳۰۴۱	$\begin{pmatrix} 0.96 & 0.30 & 0.38 & 0.72 & 0.15 \\ 0.30 & 0.98 & 0.24 & 0.34 & 0.36 \\ 0.38 & 0.24 & 0.63 & 0.29 & -0.06 \\ 0.72 & 0.34 & 0.29 & 0.89 & 0.32 \\ 0.15 & 0.36 & -0.06 & 0.32 & 0.56 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.35 \\ -0.31 \\ 0.39 \\ -0.25 \end{pmatrix}$	۱۰
۴/۱۰۴۹	۱۰/۲۷۷۸	۱/۲۹۸۲	$\begin{pmatrix} 0.92 & 0.27 & 0.35 & 0.70 & 0.10 \\ 0.27 & 1.03 & 0.26 & 0.36 & 0.40 \\ 0.35 & 0.26 & 0.61 & 0.29 & 0.02 \\ 0.70 & 0.36 & 0.29 & 0.88 & 0.35 \\ 0.10 & 0.40 & 0.02 & 0.35 & 0.66 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.07 \\ 0.29 \\ -0.35 \\ 0.35 \\ -0.25 \end{pmatrix}$	۲۰
۴/۱۷۰۹	۱۰/۵۱۲۲	۱/۲۸۹۶	$\begin{pmatrix} 0.92 & 0.32 & 0.40 & 0.61 & 0.09 \\ 0.32 & 1.14 & 0.29 & 0.39 & 0.37 \\ 0.40 & 0.29 & 0.56 & 0.33 & 0.04 \\ 0.61 & 0.39 & 0.33 & 1.00 & 0.34 \\ 0.09 & 0.37 & 0.04 & 0.34 & 0.56 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.03 \\ 0.30 \\ -0.32 \\ 0.38 \\ -0.27 \end{pmatrix}$	۳۰
۴/۲۷۸۴	۱۰/۷۷۵۹	۱/۲۸۱۵	$\begin{pmatrix} 0.87 & 0.30 & 0.37 & 0.67 & 0.08 \\ 0.30 & 1.05 & 0.29 & 0.38 & 0.37 \\ 0.37 & 0.29 & 0.84 & 0.31 & 0.13 \\ 0.67 & 0.38 & 0.31 & 0.96 & 0.34 \\ 0.08 & 0.37 & 0.13 & 0.34 & 0.56 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.06 \\ 0.23 \\ -0.33 \\ 0.36 \\ -0.31 \end{pmatrix}$	۵۰



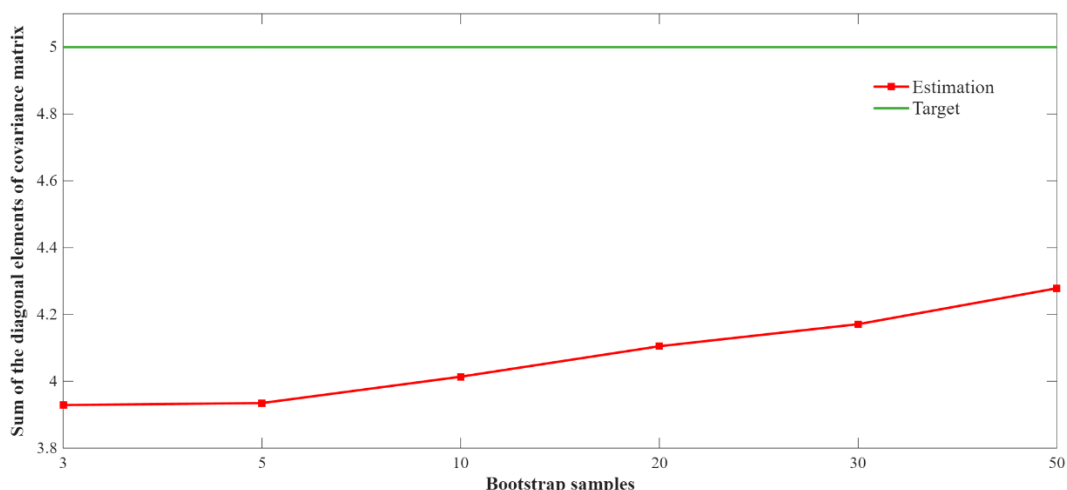
شکل ۱. مجموع قدر مطلق عناصر بردار میانگین برآورد شده به ازای تعداد نمونه‌های بوت‌استرپی مختلف.

Figure 1. Sum of the absolute values of the elements of the estimated mean vector for different numbers of bootstrap samples.



شکل ۲. مجموع کل عناصر ماتریس کوواریانس برآورد شده به ازای تعداد نمونه‌های بوت‌استرپی مختلف.

Figure 2. Sum of the estimated covariance matrix elements for different numbers of bootstrap samples.



شکل ۳. مجموع مؤلفه‌های قطر اصلی ماتریس کوواریانس برآورد شده به ازای تعداد نمونه‌های بوت‌استرپی مختلف.

Figure 3. Sum of the diagonal elements of the estimated covariance matrix for different numbers of bootstrap samples.

جدول ۱ و شکل ۱ نشان می‌دهد که با افزایش تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ، مقدار شاخص مجموع قدر مطلق عناصر بردار میانگین برآورد شده روندی کاهشی با شیبی بسیار ملایم دارد.

- شاخص $\text{Sum}(S^{\circ})$ با مقدار هدف ۱۵ برای تعداد ۳، ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰ و ۵۰، نمونه بوت‌استرپ به ترتیب برابر ۹/۴۵۸۶، ۱۰/۲۹۳، ۱۰/۱۲۴۰، ۱۰/۲۷۷۸، ۱۰/۵۱۲۲ و ۱۰/۷۷۵۹ حاصل شده است. بنابراین با افزایش تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ، مقدار شاخص روندی افزایشی با شیبی ملایم داشته و به مقدار هدف خود نزدیک‌تر می‌شود. با وجود این، حتی در صورت

نتایج نشان‌دهنده آن است که:

- در مجموع، نتایج به‌دست‌آمده حاکی از آن است که با وجود در اختیار داشتن تنها یک نمونه مرجع در فاز ۱، روش بوت‌استرپ پیشنهادی توانسته است برآوردهایی نسبتاً پایدار و قابل قبول از بردار میانگین و ماتریس کوواریانس مشخصه‌های کیفی فراهم سازد.
- مقادیر شاخص $\| \bar{x}^{\circ} \|_1$ ، به ترتیب برای تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ ۳، ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ برابر با ۱/۳۲۱۹، ۱/۳۱۷۱، ۱/۳۰۴۱، ۱/۲۹۸۲، ۱/۲۸۹۶ و ۱/۲۸۱۵ به‌دست آمده است. مقدار هدف این شاخص در مثال عددی برابر صفر است، که معرف حالت ایده‌آل این شاخص است. نتایج

• **تغییر در میانگین:** شایان توجه است که در این حالت عامل انحراف باعث شیفت بردار میانگین از $\mu_{IC} = (\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \dots, \mu_5 = 0)^T$ به $\mu_{oc} = \mu_{IC} + \Delta$ ، $\Delta = (\delta_1\sigma_1, \dots, \delta_5\sigma_5)^T$ می‌شود. در شبیه‌سازی‌های انجام شده، بزرگی تغییر در میانگین مشخصه‌ها یکسان در نظر گرفته می‌شود. از آن‌جا که واریانس متغیرها در مثال عددی برابر ۱ در نظر گرفته شده، داریم $\mu_{oc} = (\delta, \delta, \delta, \delta, \delta)^T$

• **تغییر در انحراف معیار مشخصه کیفی:** در این حالت عامل انحراف باعث می‌شود که انحراف معیار مشخصه k ام از مقدار اسمی σ_k به $\psi_k\sigma_k$ شیفت پیدا کند. همانند سناریوی اول، بزرگی تغییر در انحراف معیار مشخصه‌ها یکسان و برابر ψ در نظر گرفته می‌شود. از آن‌جا که در مثال عددی واریانس تمامی متغیرها برابر ۱ و ضریب همبستگی میان هر دو جفت مشخصه کیفی برابر $\delta = 0.5$ در نظر گرفته شده است، ماتریس کوواریانس خارج از کنترل به صورت زیر خواهد بود:

$$\Sigma_{oc} = \begin{pmatrix} \psi^2 & 0.5\psi^2 & \dots & 0.5\psi^2 \\ 0.5\psi^2 & \psi^2 & \dots & 0.5\psi^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.5\psi^2 & 0.5\psi^2 & \dots & \psi^2 \end{pmatrix}_{5 \times 5} \quad (16)$$

• **تغییر توام در میانگین و انحراف معیار مشخصه‌ها:** در این سناریو عامل انحراف باعث تغییر توام بردار میانگین و ماتریس کوواریانس به μ_{oc} و Σ_{oc} می‌شود.

عملکرد نمودارهای پیشنهادی به ازای سناریوهای خارج از کنترل ۱ و ۲ یعنی تغییرات جداگانه در میانگین و پراکندگی به ازای سه شاخص ARL ، $SDRL$ و MRL در جدول ۲ خلاصه شده است. نتایج حاصل نشان‌دهنده آن است که

(۱) در تمامی شیفت‌های جداگانه میانگین، نمودار Classical-MGLR از ARL کم‌تری نسبت به نمودار Classical-Max برخوردار است. به‌طور مشخص به ازای تغییرات متوسط $\delta = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ و $۵۲/۶۳$ و $۶۰/۷۰$ ، $۴۸/۱۸$ ، $۱۰/۵۹$

تولید ۵۰ نمونه بوت‌استرپی نیز شاخص $Sum(S^\circ)$ هنوز فاصله قابل توجهی با مقدار هدف دارد، که بیانگر آن است که برای دستیابی به برآوردی نزدیک‌تر به هدف ممکن است تعداد بیشتری از نمونه‌های بوت‌استرپ نیاز باشد.

• شاخص $Tr(S^\circ)$ با مقدار هدف ۵ برای تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ ۳، ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ به‌ترتیب برابر با $۳/۹۲۸۹$ ، $۳/۹۳۴۸$ ، $۴/۰۱۳۷$ ، $۴/۱۰۴۹$ و $۴/۱۷۰۹$ است. در نتیجه این شاخص نیز با افزایش تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ روندی افزایشی و کاملاً یکنواخت دارد. این رفتار از نظر آماری قابل انتظار است، زیرا افزایش تعداد بازنمونه‌گیری‌ها سبب می‌شود برآورد واریانس‌ها (که عناصر قطر اصلی ماتریس کوواریانس هستند) پایدارتر و نزدیک‌تر به مقدار واقعی شوند.

۶-۲- ارزیابی اثر تخمین پارامتر بر منحنی طول دنباله

در این بخش، اثر خطای ناشی از برآورد بردار میانگین و ماتریس کوواریانس بر اساس تنها یک نمونه مرجع در فاز ۱ بر توان نمودارهای نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و ماکزیمم چندمتغیره در فاز ۲ بررسی می‌شود. برای این منظور، هر دو دسته تغییرات منفرد و هم‌زمان در بردار میانگین و ماتریس کوواریانس فرآیند در نظر گرفته شده و سه شاخص ARL ، $SDRL$ و MRL برای تکنیک‌های پایش توام پیشنهادی بر اساس ۲۰۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی در نرم‌افزار متلب استخراج می‌شوند. به‌منظور بررسی اثر برآورد پارامترها بر توان نمودارهای ذکر شده، در وهله اول حد کنترل بالای نسخه‌های کلاسیک آن‌ها از طریق شبیه‌سازی به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که مقدار متوسط طول دنباله در حالت تحت کنترل برابر با $ARL_{IC} = 50$ شود که معادل با تنظیم نرخ هشدارهای اشتباهی دو نمودار در سطح $\alpha = 0.02$ است. بر این اساس مقادیر حد کنترل بالای نسخه‌های کلاسیک این دو نمودار به‌ترتیب برابر با $UCL_G = 47.1075$ و $UCL_M = 2.4833$ است. سه سناریوی خارج از کنترل در نظر گرفته شده به شرح زیر هستند:

ترتیب ۱۱/۰۴، ۴۹/۹۵، ۶۶/۳۲ و ۶۸/۸۳ درصد کم‌تر از نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره است. این روند حاکی از آن است که با افزایش اندازه شیفت در میانگین، برتری نمودار Classical-Max نسبت به نمودار Classical-MGLR به ازای شاخص انحراف معیار طول دنباله تقویت می‌شود (شکل ۶).

(۴) در تمامی شیفت‌های انحراف معیار مشخصه‌های کیفی، نمودار Classical-Max دارای شاخص *SDRL* کمتری نسبت به نمودار Classical-MGLR است. در نتیجه این نمودار علاوه بر سرعت بیشتر در تشخیص اختلالات پراکندگی، از ثبات بیشتری در زمان اعلام هشدار نیز برخوردار است. به‌طور مشخص به ازای تغییرات $\psi \in \{1.1, 1.2, 1.3, 1.5\}$ نمودار ماکزیمم چندمتغیره به ترتیب ۴۵/۴۸، ۵۸/۱۱، ۵۶/۴۷ و ۴۲/۴۳ درصد از شاخص *SDRL* کم‌تری نسبت به نمودار رقیب برخوردار است (شکل ۷).

درصد سریع‌تر از نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته عمل می‌کند. این موضوع نشان‌دهنده آن است که به ازای تغییرات کوچک ($\delta = 0.25$) تفاوت عملکرد دو نمودار قابل توجه نبوده لیکن با افزایش بزرگی شیفت تفاوت قابل توجه است (شکل ۴).

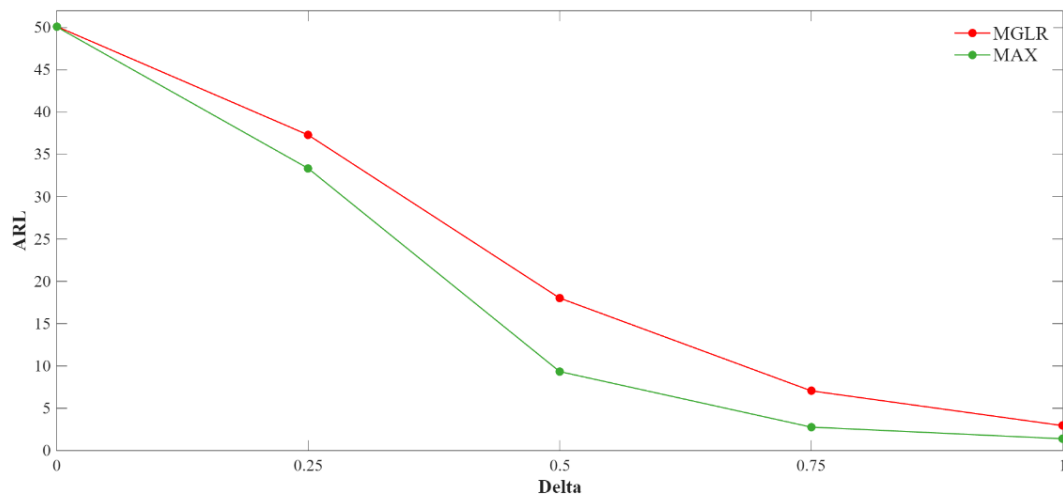
(۲) نمودار Classical-Max عملکرد سریع‌تری در تشخیص اختلالات انحراف معیار مشخصه‌ها از خود نشان می‌دهد و دارای شاخص *ARL* کم‌تری به ازای تمامی مقادیر ψ نسبت به نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره است. به‌طور کلی، با افزایش اندازه شیفت در انحراف معیار مشخصه‌ها، اختلاف عملکرد دو نمودار ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد (شکل ۵).

(۳) نمودار Classical-Max در تمامی اندازه‌های شیفت میانگین دارای *SDRL* کمتری نسبت به نمودار Classical-MGLR است. به‌طور مشخص، مقادیر انحراف معیار طول دنباله نمودار ماکزیمم به ازای تغییرات $\delta = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ به

جدول ۲. ویژگی‌های طول دنباله نمودارهای رقیب به ازای تغییرات جداگانه میانگین و انحراف معیار

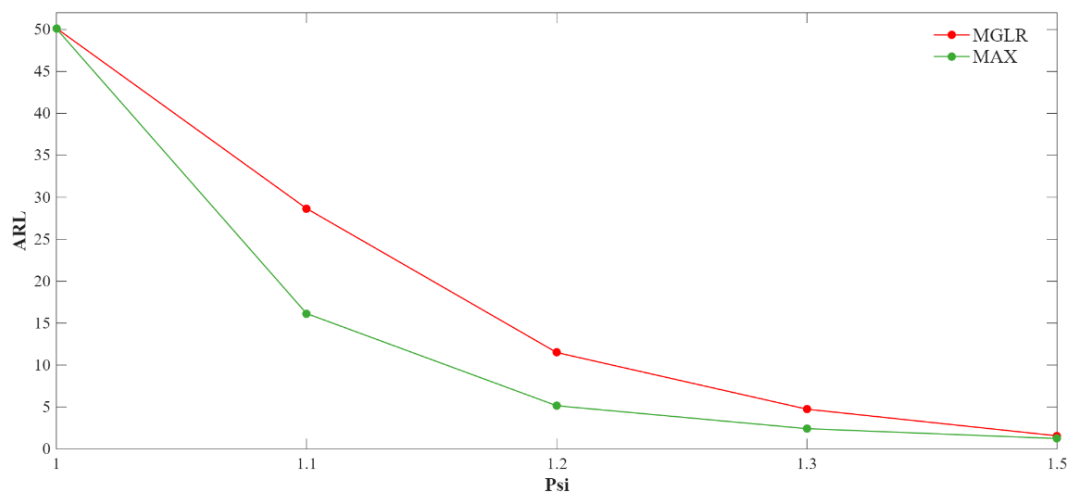
Table 2. Run-length characteristics of competing control charts under separate changes in the mean and standard deviation.

(δ, ψ)									شاخص	نمودار
$(0, 0.15)$	$(0, 0.3)$	$(0, 0.45)$	$(0, 0.6)$	$(0, 0.75)$	$(0, 0.9)$	$(0, 1)$	$(0, 1.1)$	$(0, 1.5)$		
۱/۵۶۵	۴/۷۴۲	۱۱/۴۹۶	۲۸/۶۶۳	۲/۹۴۹	۷/۰۶۱	۱۸/۰۲۷	۳۷/۳۱۵	۵۰/۱۴۷	<i>ARL</i>	Classical-MGLR
۰/۹۳۸	۴/۲۳۴	۱۱/۰۲۸	۲۸/۳۰۴	۲/۳۹۰	۶/۵۲۴	۱۷/۴۶۵	۳۷/۱۵۲	۴۹/۵۶۳	<i>SDRL</i>	
۱	۳	۸	۲۰	۲	۵	۱۳	۲۶	۳۵	<i>MRL</i>	
۱/۲۳۷	۲/۴۱۹	۵/۱۵۱	۱۶/۱۴۵	۱/۳۹۷	۲/۷۷۵	۹/۳۴۱	۳۳/۳۶۴	۵۰/۰۹۷	<i>ARL</i>	Classical-Max
۰/۵۴۰	۱/۸۴۳	۴/۶۲۰	۱۵/۴۳۱	۰/۷۴۵	۲/۱۹۷	۸/۷۴۱	۳۳/۰۵۱	۴۹/۶۶۴	<i>SDRL</i>	
۱	۲	۴	۱۲	۱	۲	۷	۲۳	۳۵	<i>MRL</i>	
۱/۸۰۱	۵/۱۶۷	۱۲/۱۶۹	۲۹/۷۳۸	۳/۲۲۱	۷/۵۶۰	۱۹/۰۳۶	۳۸/۴۵۸	۵۰/۲۵۰	<i>ARL</i>	Bootstrap-MGLR
۱/۰۸۰	۴/۶۱۵	۱۱/۶۷۷	۲۹/۳۵۷	۲/۶۰۹	۶/۹۸۴	۱۸/۴۳۷	۳۸/۲۸۰	۴۹/۸۶۲	<i>SDRL</i>	
۱	۳	۸	۲۱	۲	۵	۱۴	۲۷	۳۵	<i>MRL</i>	
۱/۴۳۲	۲/۶۳۰	۵/۶۵۵	۱۶/۵۲۹	۱/۵۸۷	۳/۱۰۵	۱۰/۲۹۴	۳۵/۱۱۱	۵۰/۸۳۴	<i>ARL</i>	Bootstrap-Max
۰/۶۲۶	۲/۰۰۴	۵/۰۷۰	۱۵/۷۹۵	۰/۸۴۶	۲/۴۶۰	۹/۶۲۶	۳۴/۷۹۲	۵۰/۳۳۵	<i>SDRL</i>	
۱	۲	۴	۱۲	۱	۲	۸	۲۴	۳۵	<i>MRL</i>	



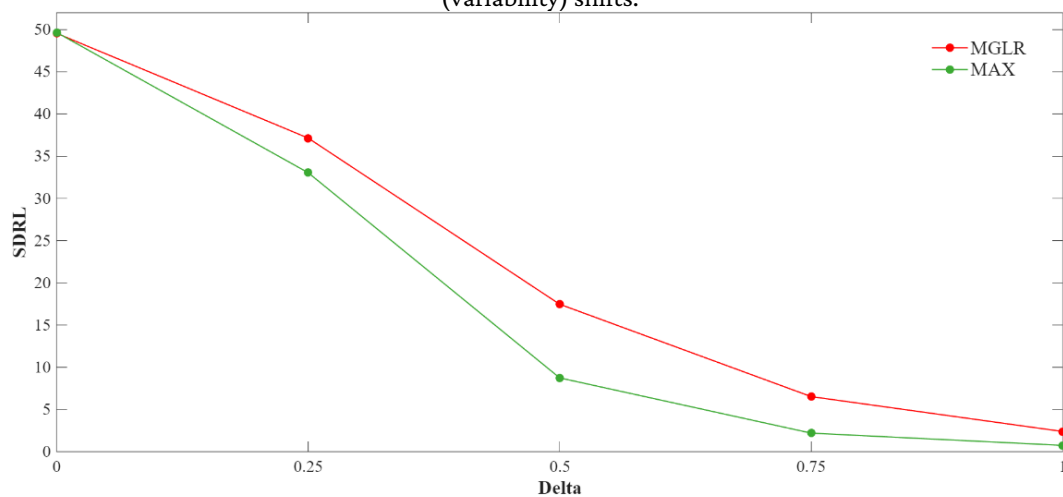
شکل ۴. منحنی متوسط طول دنباله نسخه‌های کلاسیک نمودارهای کنترل رقیب به ازای تغییرات میانگین.

Figure 4. Average run-length (ARL) curves of the classical versions of competing control charts under mean shifts.



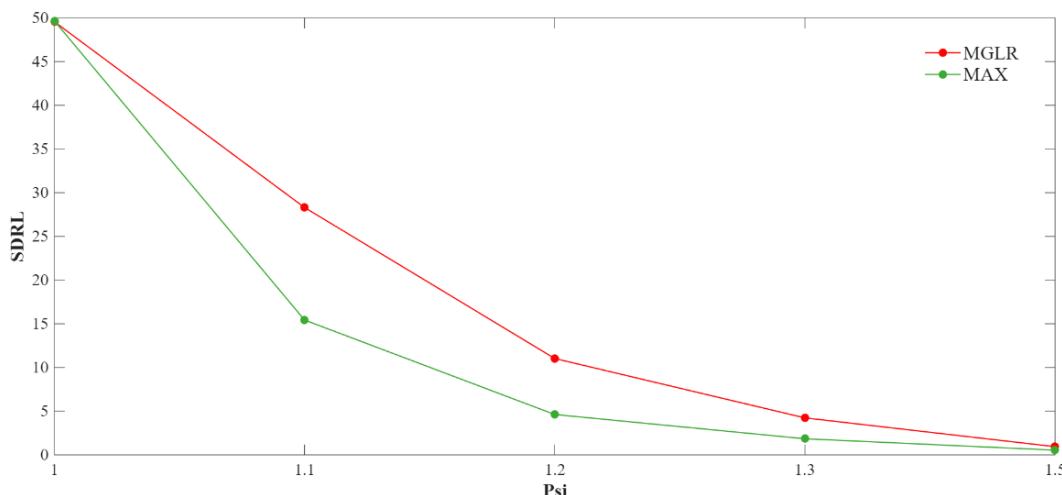
شکل ۵. منحنی متوسط طول دنباله نسخه‌های کلاسیک نمودارهای کنترل رقیب به ازای تغییرات پراکندگی.

Figure 5. Average run-length (ARL) curves of the classical versions of competing control charts under dispersion (variability) shifts.



شکل ۶. منحنی انحراف معیار طول دنباله نسخه‌های کلاسیک نمودارهای کنترل رقیب به ازای تغییرات میانگین.

Figure 6. Standard deviation of run length (SDRL) curves of the classical versions of competing control charts under mean shifts.



شکل ۷. منحنی انحراف معیار طول دنباله نسخه‌های کلاسیک نمودارهای کنترل رقیب به ازای تغییرات پراکندگی.

Figure 7. Standard deviation of run length (SDRL) curves of the classical versions of competing control charts under dispersion (variability) shifts.

افزایش شیفت در انحراف معیار مشخصه‌های کیفی، اثر نوسانات حاصل از بازنمونه‌گیری بوت‌استرپی بر توان نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چند متغیره تشدید می‌شود.

(۳) شاخص *SDRL* تحت تغییرات بردار میانگین به ازای شیفت‌های $\delta \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ در نسخه بوت‌استرپی نمودار MGLR به ترتیب به میزان $3/04$ ، $5/57$ ، $7/05$ و $9/16$ درصد بیشتر از نسخه کلاسیک این نمودار است. این الگوی افزایشی همان رفتاری را نشان می‌دهد که در شاخص *ARL* مشاهده شد و بیانگر نقش مهم خطای تخمین پارامتر در کاهش پایداری عملکرد نمودار است. همچنین به ازای تغییرات $\psi \in \{1.1, 1.2, 1.3, 1.5\}$ در انحراف معیار مشخصه‌ها، نمودار Bootstrap-MGLR به ترتیب به میزان $3/72$ ، $5/89$ ، $9/00$ و $15/14$ درصد از انحراف معیار طول دنباله بالاتری نسبت به نسخه کلاسیک برخوردار است.

با مقایسه ویژگی‌های طول دنباله نمودارهای Classical-Max و Bootstrap-Max به ازای سناریوهای خارج از کنترل اول و دوم نیز موارد زیر قابل نتیجه‌گیری است:

(۱) مقدار شاخص *ARL* در نمودار Bootstrap-Max در تمامی سطوح شیفت در میانگین بزرگ‌تر از مقدار متناظر در نمودار Classical-Max است. این افزایش به ترتیب $5/24$ درصد در

با مقایسه ویژگی‌های طول دنباله نمودارهای Classical-MGLR و Bootstrap-MGLR به ازای سناریوهای اول و دوم خارج از کنترل موارد زیر قابل نتیجه‌گیری است:

(۱) بر اساس شکل ۸، به ازای تمامی شیفت‌های میانگین، نمودار Bootstrap-MGLR دارای *ARL* بزرگ‌تری نسبت به نمودار Classical-MGLR است. با افزایش δ ، میزان افزایش *ARL* به واسطه خطای تخمین به صورت یکنواخت افزایش یافته به طوری که به ازای بزرگی شیفت $0/25$ ، $0/5$ ، $0/75$ و 1 به ترتیب افزایش $3/06$ ، $5/60$ ، $7/07$ و $9/22$ درصدی در *ARL* مشاهده می‌شود.

(۲) همان‌طور که شکل ۹ نشان می‌دهد در شرایطی که عامل انحراف منجر به تغییر ساختار ماتریس کوواریانس می‌شود، خطای تخمین پارامتر منجر به افزایش نسبتاً قابل‌ملاحظه‌ای در شاخص *ARL* نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره می‌شود. درصد افزایش *ARL* برای شیفت‌های $1/1$ ، $1/2$ ، $1/3$ و $1/5$ به ترتیب $3/75$ ، $5/85$ ، $8/96$ و $15/08$ حاصل شده است. این روند صعودی نشان می‌دهد که در تغییرات کوچک، نقش خطای تخمین روش بوت‌استرپ نسبتاً محدود بوده و نمودار Bootstrap-MGLR عملکرد نسبتاً مشابهی با نسخه کلاسیک خود دارد. لیکن با

ماکزیمم چندمتغیره نسبت به نسخه کلاسیک است.

عملکرد نمودارهای پیشنهادی به ازای سناریوهای خارج از کنترل ۳ یعنی تغییرات توام در میانگین و پراکندگی به ازای سه شاخص ARL ، $SDRL$ و MRL در جدول ۳ خلاصه شده است. نتایج حاصل نشان‌دهنده آن است که:

(۱) در سناریوی تغییرات توأم میانگین و پراکندگی، مقدار شاخص متوسط طول دنباله نمودار Classical-Max در تمامی سطوح شیفت کمتر از مقادیر متناظر روش Classical-MGLR است. این تفاوت از ۳۸/۴۵ درصد تا بیش از ۵۳/۳۴ درصد مشاهده می‌شود که بیانگر قابلیت تشخیص سریع‌تر تغییرات توام در بردار میانگین و ماتریس کوواریانس توسط نمودار ماکزیمم چندمتغیره است.

(۲) نمودار Classical-Max در تمامی سطوح تغییرات هم‌زمان میانگین و انحراف معیار، دارای $SDRL$ کم‌تر و پایداری بیشتری نسبت به نمودار Classical-MGLR است. در هر شش شیفت توام، مقدار $SDRL$ نمودار Classical-Max به‌طور قابل‌توجهی کمتر از نمودار Classical-MGLR بوده و این اختلاف از حدود ۴۵ درصد تا بیش از ۵۵ درصد متغیر است. این موضوع بیانگر آن است که علاوه بر سرعت بیشتر نمودار Classical-Max در تشخیص تغییرات توام، این نمودار رفتار نوسانی کمتری دارد.

(۳) در تمامی سطوح تغییرات هم‌زمان میانگین و انحراف معیار، هر دو شاخص ARL و $SDRL$ نسخه بوت‌استریبی نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره بزرگ‌تر از نسخه کلاسیک است. این افزایش از حدود ۴/۵۴ درصد تا ۱۰/۲۴ درصد برای شاخص متوسط طول دنباله و از ۴/۵۰ درصد تا ۱۰/۲۸ درصد برای اشخص انحراف معیار طول دنباله متغیر است. این موضوع نشان‌دهنده اثر خطای برآورد پارامترها بر حساسیت نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره در مواجهه با اختلالات توام در پارامترهای توزیع فرآیند

$\delta = 0.25$ ، $\delta = 0.5$ در ۱۰/۲۰ درصد در ۱۱/۸۹ درصد در $\delta = 0.75$ و $\delta = 1$ درصد در ۱۳/۶۰ گزارش شده است. این موضوع بیانگر آن است که اثر خطای برآورد پارامترها به وسیله الگوریتم بوت‌استریپ بر عملکرد نمودار ماکزیمم چندمتغیره با بزرگ‌تر شدن شیفت در میانگین مشخصه‌های کیفی بیشتر آشکار می‌شود (شکل ۱۰).

(۲) شاخص ARL نمودار Bootstrap-Max در سناریوی تغییر انحراف معیار در تمامی اندازه‌های شیفت بزرگ‌تر از مقادیر متناظر در نمودار Classical-Max است. میزان افزایش از ۲/۳۸٪ در شیفت کوچک $\psi = 1.1$ آغاز شده و تا ۱۵/۷۶٪ در شیفت $\psi = 1.5$ افزایش می‌یابد. این الگو بیانگر آن است که خطای تخمین پارامترهای بردار میانگین، ماتریس کوواریانس و حد کنترل بالای نمودار ماکزیمم چندمتغیره بر اساس تنها یک نمونه مرجع در تغییرات کوچک اثر محدودی دارد، اما با بزرگ‌تر شدن تغییر پراکندگی، حساسیت نمودار به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد (شکل ۱۱).

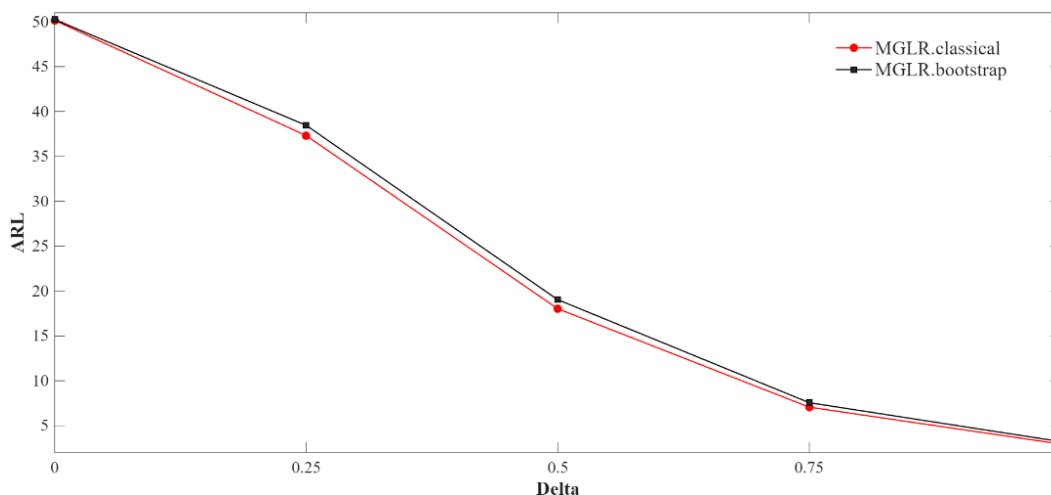
(۳) شاخص $SDRL$ در نمودار Bootstrap-Max در تمامی سطوح شیفت در میانگین مشخصه‌ها، بزرگ‌تر از مقدار متناظر در نمودار Classical-Max است. میزان افزایش $SDRL$ به ترتیب ۵/۲۷، ۱۰/۱۲، ۱۱/۹۷ و ۱۳/۵۶ درصد گزارش شده است که این روند افزایشی نشان‌دهنده کاهش ثبات عملکرد نمودار ماکزیمم چندمتغیره به دلیل خطای تخمین پارامتر است.

(۴) شاخص $SDRL$ در نمودار Bootstrap-Max در تمام سطوح شیفت انحراف معیار بزرگ‌تر از مقدار متناظر در نمودار Classical-Max است. میزان افزایش $SDRL$ به ترتیب ۲/۳۶، ۹/۷۴، ۸/۷۴ و ۱۵/۹۳ درصد بوده که نشان‌دهنده افزایش نوسان در زمان تشخیص تغییرات ماتریس کوواریانس در نسخه بوت‌استریبی نمودار

درصد برای شاخص انحراف معیار طول دنباله متغیر است. این موضوع بیانگر آن است که خطای برآورد پارامترها بر حساسیت نمودار ماکزیمم چندمتغیره در برابر اختلالات هم‌زمان میانگین و پراکندگی تأثیرگذار است. این اثر به‌ویژه در شیفت‌هایی که شدت تغییرات پراکندگی بیشتر است، پررنگ‌تر شده و منجر به افزایش قابل‌ملاحظه ARL و $SDRL$ می‌گردد.

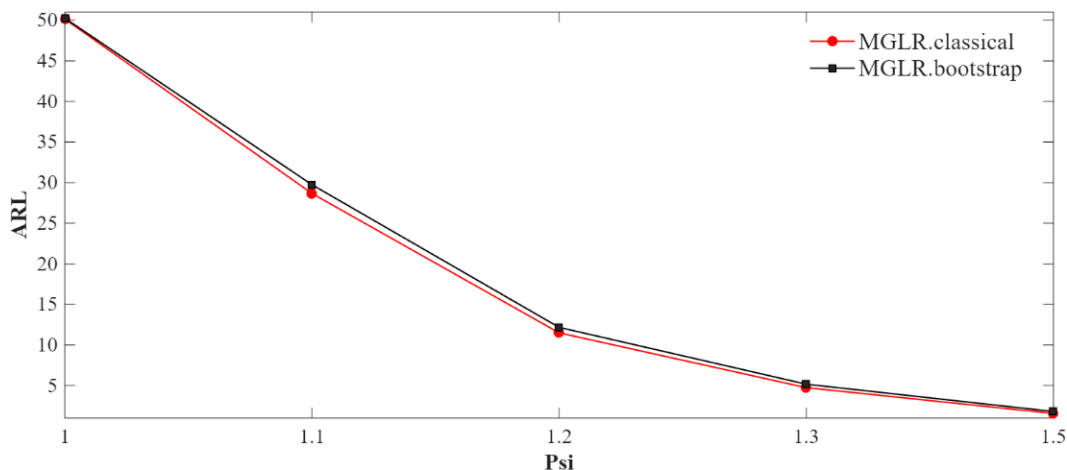
است؛ به‌ویژه در شیفت‌هایی که تغییرات پراکندگی شدیدتر است، این خطا تأثیر بیشتری دارد.

(۴) در تمامی سطوح تغییر هم‌زمان میانگین و انحراف معیار، شاخص ARL در نسخه بوت‌استرپی نمودار ماکزیمم چندمتغیره، همواره از نسخه کلاسیک بزرگ‌تر است. دامنه‌ی این افزایش بین ۶/۷۷ درصد تا ۱۲/۷۳ درصد برای متوسط طول دنباله و از ۶/۸۲ درصد تا ۱۲/۷۸



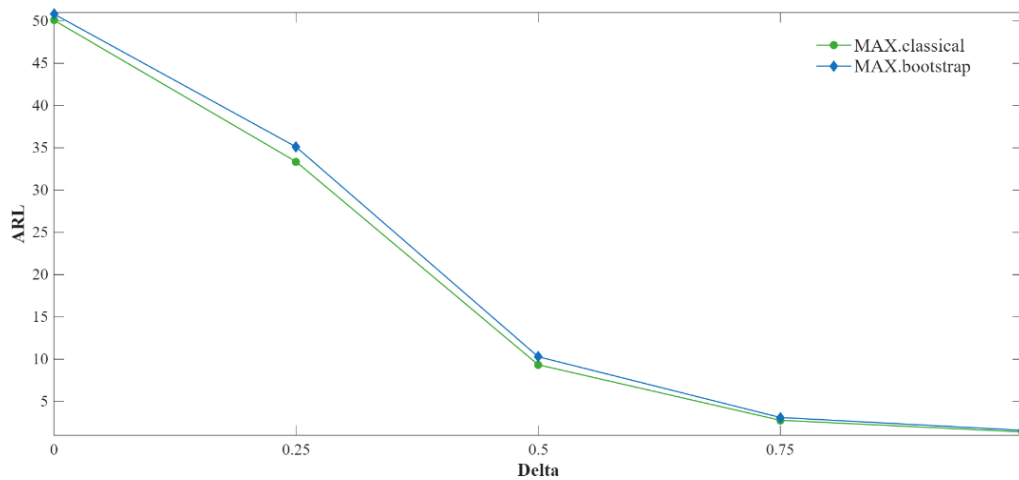
شکل ۸. منحنی متوسط طول دنباله نسخه‌های کلاسیک نمودارهای کنترل رقیب به ازای تغییرات میانگین.

Figure 8. Average run-length (ARL) curves of the classical and bootstrap MGLR charts under mean shifts.



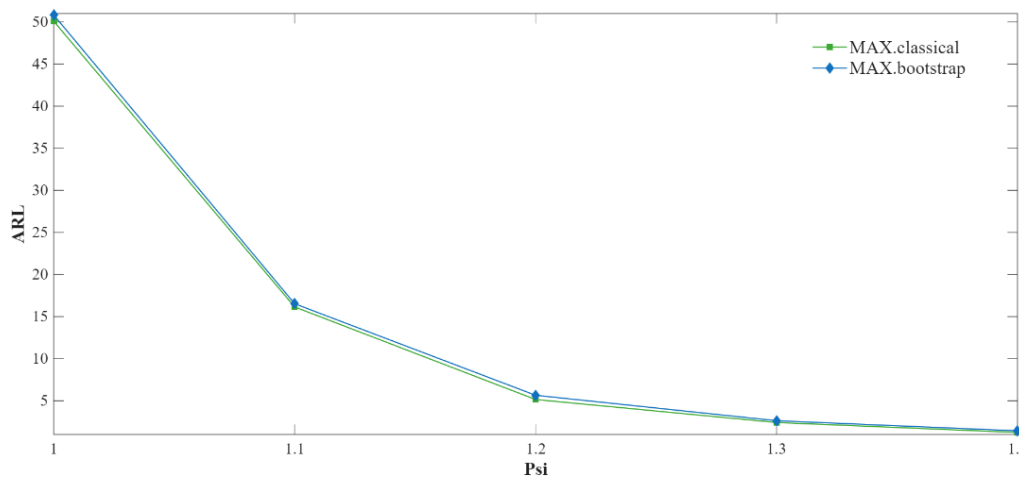
شکل ۹. منحنی متوسط طول دنباله نسخه‌های کلاسیک نمودارهای کنترل رقیب به ازای تغییرات پراکندگی.

Figure 9. Average run-length (ARL) curves of the classical and bootstrap MGLR charts under dispersion (variability) shifts.



شکل ۱۰. منحنی انحراف معیار طول دنباله نسخه‌های کلاسیک نمودارهای کنترل رقیب به ازای تغییرات میانگین.

Figure 10. Average run-length (ARL) curves of the classical and bootstrap MMAX charts under mean shifts.



شکل ۱۱. منحنی انحراف معیار طول دنباله نسخه‌های کلاسیک نمودارهای کنترل رقیب به ازای تغییرات پراکندگی.

Figure 11. Average run-length (ARL) curves of the classical and bootstrap MMAX charts under dispersion (variability) shifts.

۷- نتیجه‌گیری

چندمتغیره و ماکزیمم چندمتغیره با در نظر گرفتن اثر خطای تخمین پارامتر و حدود کنترل به‌وسیله الگوریتم بوت‌استرپ بر توان نمودارهای مورد نظر پیشنهاد شد. نتایج شبیه‌سازی‌های گسترده مونت‌کارلو نشان داد که الگوریتم بوت‌استرپ پیشنهادی، علی‌رغم اتکا به تنها یک نمونه مرجع، توانایی مناسبی در برآورد پارامترهای توزیع یعنی بردار میانگین و ماتریس کوواریانس و همچنین حدود کنترل نمودارهای مورد نظر دارد. نتایج حاصل همچنین تایید نمود که با افزایش تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ، شاخص‌های مرتبط با برآورد بردار میانگین و ماتریس کوواریانس با شیبی ملایم به مقادیر هدف نزدیک‌تر می‌شوند. با این حال، برای دستیابی به برآورد دقیق‌تر، به‌ویژه در مجموع عناصر و مؤلفه‌های قطر اصلی ماتریس کوواریانس برآورد شده، استفاده از تعداد بیشتری

تمامی روش‌های پایش همزمان بردار میانگین و ماتریس کوواریانس موجود در ادبیات، بر فرض دسترسی به تعداد کافی نمونه مرجع برای برآورد پایدار پارامترها و حدود کنترل مبتنی هستند؛ در حالی که در بسیاری از کاربردهای واقعی، تنها یک نمونه مرجع در تجزیه و تحلیل فاز ۱ در دسترس است. برای رفع این خلأ، در این مطالعه الگوریتمی مبتنی بر روش بوت‌استرپ برای تخمین بردار میانگین، ماتریس کوواریانس و حدود کنترل دو نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و نمودار ماکزیمم چندمتغیره در فاز ۱ توسعه داده شد. سپس، رویکردهای پایش فاز ۲ به منظور استخراج منحنی طول دنباله نمودارهای نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته

مشارکت‌های نویسندگان

فضه عبانواز کرده‌مهین: تهیه پیش‌نویس خطی، بازنگری اولیه گزارش، روش‌شناسی پژوهش، مدل مفهومی پژوهش، بررسی ادبیات نظری و پیشینه مرتبط، تجزیه و تحلیل داده‌ها، پیش‌نویس تحلیل آماری، بازبینی متن؛ **محمد رضا ملکی:** راهنمایی، بازبینی متن؛ **حسین اقبالی:** راهنمایی، بازبینی متن؛

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ‌گونه تضاد منافع مرتبط با تحقیق حاضر ندارند و نتایج به‌صورت بی‌طرفانه و بدون دخالت منافع شخصی یا حرفه‌ای به‌دست‌آمده است.

قدردانی

نویسندگان صمیمانه از عوامل اجرایی نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری، داوران محترم و سایر افرادی که در بهبود کیفیت این مقاله همکاری داشته‌اند، قدردانی می‌نمایند.

نمونه بوت‌استرپ ضروری است. همچنین تحلیل شاخص‌های متوسط طول دنباله، انحراف معیار طول دنباله و میانه طول دنباله در سناریوهای مختلف تغییر (بردار میانگین، ماتریس کوواریانس و تغییرات توأم) نشان داد که خطای تخمین بر عملکرد هر دو نمودار نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته چندمتغیره و نمودار ماکزیمم چندمتغیره در فاز ۲ اثرگذار است. در این مقاله، بعد فرآیند ثابت در نظر گرفته شد، لیکن در سیستم‌های واقعی تولید تعداد مشخصه‌ها می‌تواند در طول زمان تغییر کند و این مسئله ساختار میانگین و ماتریس کوواریانس را دچار ناپایداری می‌کند. از این‌رو، پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی بعد فرآیند به‌صورت تطبیقی در نظر گرفته شود تا در هر گام زمانی، فقط متغیرهای فعال شناسایی شده و بر اساس آن‌ها میانگین و ماتریس کوواریانس بازبرآورد شوند. در پژوهش حاضر، مشاهدات هر نمونه به‌صورت مستقل از یکدیگر در نظر گرفته شدند و اثر خودهمبستگی میان آن‌ها در طراحی روش‌های پیشنهادی لحاظ نشد. از این‌رو، توسعه روش‌های پیشنهادی در شرایط وجود خودهمبستگی و با بهره‌گیری از مدل‌های سری زمانی، می‌تواند به‌عنوان یکی از مسیرهای مهم برای تحقیقات آتی مدنظر قرار گیرد.

جدول ۳. ویژگی‌های طول دنباله نمودارهای رقیب به ازای تغییرات توأم میانگین و انحراف معیار

Table 3. Run-length characteristics of competing control charts under simultaneous changes in the mean and standard deviation.

نمودار	شاخص	(δ, ψ)					
		$(0.25, 0.1)$	$(0.25, 0.2)$	$(0.25, 0.3)$	$(0.5, 0.1)$	$(0.5, 0.2)$	$(0.5, 0.3)$
Classical-MGLR	ARL	50/147	21/906	9/572	4/141	11/477	3/051
	SDRL	49/563	21/417	9/073	3/599	11/102	2/506
	MRL	35	15	7	3	8	2
Classical-Max	ARL	50/097	12/211	4/466	2/277	5/432	1/878
	SDRL	49/664	11/804	3/931	1/700	4/957	1/283
	MRL	35	9	3	2	4	1
Bootstrap-MGLR	ARL	50/250	23/363	10/137	4/565	11/998	3/352
	SDRL	49/862	22/848	9/936	3/969	11/602	2/751
	MRL	35	16	7	3	9	2
Bootstrap-Max	ARL	50/8342	13/038	4/780	2/531	5/908	2/117
	SDRL	50/3347	12/609	4/205	1/891	5/395	1/447
	MRL	35	10	3	2	4	1

مراجع

- <https://doi.org/10.1080/16843703.2021.1949825>
- Jalilibal, Z., Amiri, A., & Khoo, M. B. (2022). A literature review on joint control schemes in statistical process monitoring. *Quality and Reliability Engineering International*, 38(6), 3270-3289. <https://doi.org/10.1002/qre.3114>
- Leiva, V., Santos, R. A. D., Saulo, H., Marchant, C., & Lio, Y. (2023). Bootstrap control charts for quantiles based on log-symmetric distributions with applications to the monitoring of reliability data. *Quality and Reliability Engineering International*, 39(1), 1-24. <https://doi.org/10.1002/qre.3072>
- Lu, S. L., Chen, J. H., & Yang, S. F. (2021). Auxiliary information-based maximum generally weighted moving average chart for simultaneously monitoring process mean and variability. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(8), 3242-3261. <https://doi.org/10.1002/qre.2906>
- Ma, Z., Park, C., & Wang, M. (2022). A robust bootstrap control chart for the log-logistic percentiles. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 16(1), 3. <https://doi.org/10.1007/s42519-021-00239-3>
- Mahpouya, F., Shahriari, H., & Roghanian, E. (2022). Design of a robust T^2 control chart, a re-sampling approach. *Quality and Reliability Engineering International*, 38(2), 924-940. <https://doi.org/10.1002/qre.3022>
- Maleki, M. R., & Salmasnia, A. (2017). Joint monitoring of process location and dispersion based on CUSUM procedure and generalized likelihood ratio in the presence of measurement errors. *Quality and Reliability Engineering International*, 33(7), 1485-1498. <https://doi.org/10.1002/qre.2120>
- Maleki, M. R., Salmasnia, A., & Yousefi, S. (2023). Multivariate ELR control chart with estimated mean vector and covariance matrix. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 52(24), 8814-8827. <https://doi.org/10.1080/03610926.2022.2076116>
- McCracken, A. K., & Chakraborti, S. (2013). Control charts for joint monitoring of mean and variance: an overview. *Quality Technology & Quantitative Management*, 10(1), 17-36. <https://doi.org/10.1080/16843703.2013.11673306>
- Modok, B., Kundu, A., & Chowdhury, S. (2026). Studentized bootstrap control chart for percentiles of truncated beta distributed environmental data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 40(3), 58. <https://doi.org/10.1007/s00477-026-03199-x>
- Najafzadeh, A., Mardan, E., Maleki, M. R., & Eghbali, H. (2026). Ridge-penalized likelihood ratio control chart for monitoring high-dimensional
- Al-Lami, M. A. H., Jabbari Khamnei, H., & Heydari, A. A. (2025). A parametric bootstrap control chart for Lindley Geometric percentiles. *Plos one*, 20(2), e0316449. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0316449>
- Chatterjee, K., Koukouvinos, C., & Lappa, A. (2023). A joint monitoring of the process mean and variance with a TEWMA-Max control chart. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 52(22), 8069-8095. <https://doi.org/10.1080/03610926.2022.2056748>
- Chatterjee, K., Koukouvinos, C., Lappa, A., & Roupia, P. (2024). A joint monitoring of the process mean and variance with a generally weighted moving average maximum control chart. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 53(11), 5122-5142. <https://doi.org/10.1080/03610918.2023.2170415>
- Chiang, J. Y., Lio, Y. L., Ng, H. K. T., Tsai, T. R., & Li, T. (2018). Robust bootstrap control charts for percentiles based on model selection approaches. *Computers & Industrial Engineering*, 123, 119-133. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.06.012>
- de Andrade Mairinque, L., Bruno Dutra Pereira, R., Mota Nascimento, K., Henrique Lauro, C., & Cardoso Brandão, L. (2022). A bootstrap control chart for the availability index. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 120(7), 5151-5161. <https://doi.org/10.1007/s00170-022-09009-2>
- Ghazvini, M. M., & Salmasnia, A. (2026). A Machine Learning-based Control Chart for Monitoring the Dispersion of High-dimensional Data Streams in Phase II. *System Engineering and Productivity*, 6(1), 163-191. <https://doi.org/10.22034/sep.2025.2069790.1387>
- Gnanadesikan, M., & Gupta, S. S. (1970). A selection procedure for multivariate normal distributions in terms of the generalized variances. *Technometrics*, 12(1), 103-117. <https://doi.org/10.1080/00401706.1970.10488638>
- Iji, Z., Maleki, M. R., & Eghbali, H. (2025). Double sampling-based ridge penalized likelihood ratio control charting scheme for detecting the covariance matrix disturbances. *System Engineering and Productivity*, 5(1), 51-64. <https://doi.org/10.22034/sep.2025.2046743.1238>
- Jaime, M., Francisco, A., & Eugenio, E. K. (2021). Guaranteeing acceptable in-control and out-of-control performance of joint \bar{X} -S control charts with estimated parameters. *Quality Technology & Quantitative Management*, 18(6), 701-717.

- Saha, M., Yadav, A. S., Rao, G. S., Dey, S., & Sarkar, B. (2022). Control chart using bootstrap method for logistic-exponential percentiles. *Journal of Scientific Research*, 66(5). <https://doi.org/10.37398/JSR.2022.660517>
- Salmasnia, A., Maleki, M. R., & Niaki, S. T. A. (2018). Remedial measures to lessen the effect of imprecise measurement with linearly increasing variance on the performance of the MAX-EWMAMS scheme. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 43(6), 3151-3162. <https://doi.org/10.1007/s13369-017-2896-1>
- Sharafi, S., Maleki, M. R., Salmasnia, A., & Mansoor, R. (2022). The performance of max-GWMA control chart in the presence of measurement errors. *Management and Production Engineering Review*, 13. <http://dx.doi.org/10.24425/mper.2022.142392>
- Teoh, J. W., Teoh, W. L., Hu, X., Tran, K. P., & Godase, D. G. (2025). A new omnibus SPRT chart for monitoring process mean and variability based on the average number of observations to signal. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 95(1), 49-69. <https://doi.org/10.1080/00949655.2024.2417253>
- Zhang, J., Li, Z., & Wang, Z. (2010). A multivariate control chart for simultaneously monitoring process mean and variability. *Computational statistics & data analysis*, 54(10), 2244-2252. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2010.03.027>
- covariance matrix changes with limited reference data: a bootstrap-based approach. *International Journal of Management and Decision Making* (In Press).
- Noor-ul-Amin, M., Arif, F., & Hanif, M. (2019). Joint monitoring of mean and variance using likelihood ratio test statistic under pair ranked set sampling scheme. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43, 2449-2460. <https://doi.org/10.1007/s40995-019-00718-0>
- Panda, S., & Wang, M. (2025). Bootstrap-based control chart for percentiles of the generalized lognormal distribution with reliability applications. *Quality and Reliability Engineering International*, 41(4), 1329-1349. <https://doi.org/10.1002/qre.3722>
- Parvin, R., Khoo, M. B., Saha, S., & Teoh, W. L. (2023). Proposed variable sampling interval maximum EWMA and distance EWMA charts with unknown process parameters. *Stat*, 12(1), e605. <https://doi.org/10.1002/sta4.605>
- Perdana, S. A., Mashuri, M., & Ahsan, M. (2025). Improved bootstrap \bar{X} control chart for non-normally distributed data. *MethodsX*, 14, 103190. <https://doi.org/10.1016/j.mex.2025.103190>
- Perry, M. B., & Wang, Z. (2022). A distribution-free joint monitoring scheme for location and scale using individual observations. *Journal of Quality Technology*, 54(2), 144-161. <https://doi.org/10.1080/00224065.2020.1829213>
- Pourzarkeshian, E., Maleki, M. R., & Ahmadvand, M. (2022). Estimation of Step Change Point in Business Models by Simultaneously Considering Discrete and Continuous Indicators. *System Engineering and Productivity*, 2(2), 49-72. <https://doi.org/10.22034/sep.2022.243410>
- Qiao, L. (2025). A nonparametric Bootstrap CUSUM multi-chart for detecting unknown abrupt changes. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 54(12), 5409-5426. <https://doi.org/10.1080/03610918.2025.2450704>
- Saeed, N., Kamal, S., & Aslam, M. (2024). Percentile bootstrap control chart for monitoring process variability under non-normal processes. *Scientia Iranica. Transaction E, Industrial Engineering*, 31(15), 1282-1292. <https://doi.org/10.24200/sci.2021.58118.5573>
- Saemian, M., Maleki, M. R., & Salmasnia, A. (2023). Performance of Max-HEWMAMS control chart for simultaneous monitoring of process mean and variability in the presence of measurement errors. *International Journal of Applied Decision Sciences*, 16(2), 165-188. <https://doi.org/10.1504/IJADS.2023.129473>