System Engineering and Productivity/ 2026/ Vol.6/ No.4/ 223-249

System Engineering and Productivity

DOI: 10.22034/sep.2026.2088282.1486

Vehicle Routing Problem with Mobile Customers: Modeling Considering Uncertainty in Customer Location within a Geographical Area

Abolfazl Shafaei[1,*], Hossein Shams Shemirani[1], Mohammad Reza Akbari Jokar[2], Majid Rafiee[3]

[1] Assistant Professor, Industrial Engineering Group, Golpayegan College of Engineering, Isfahan University of Technology, Golpayegan, Iran

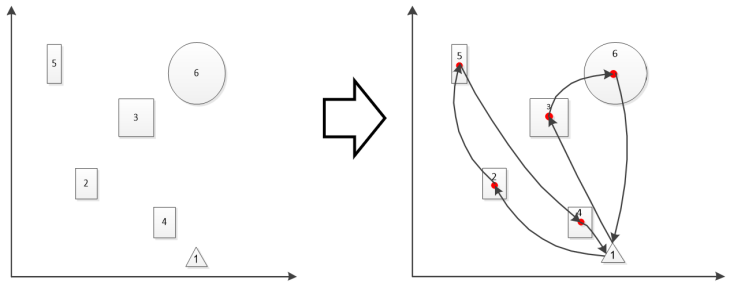
[2] Professor, Faculty of Industrial Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

[3] Associate Professor, Faculty of Industrial Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- Customer location is represented by a geographical area rather than a fixed point.
- Customers may move anywhere within their designated geographical areas.
- The proposed model simultaneously determines the optimal delivery location and vehicle route.
- The customer's location within the designated geographical area follows a probability distribution.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:
Article Type: Research paper
Received: 30 April 2026
Revised: 11 June 2026
Accepted: 22 June 2026
Available online: 22 June 2026
*Correspondence: shafaei @iut.ac.ir
How to cite this article:
Shafaei, A., Shemirani, H. S., Jokar, M. R. A., & Rafiee, M. (2026). Vehicle routing problem with mobile customers: modeling considering uncertainty in customer location within a geographical area. *System Engineering and Productivity*, 6 (4), 223-249.

Keywords:
Mobile customer
Vehicle Routing Problems
Uncertainty
Nonlinear Models
Stochastic Models

ABSTRACT

The customer with stochastic and variable location is a novel approach for modeling routing problems. This reflects the reality that when a customer places an order and the service provider begins planning the delivery, some customers do not remain stationary at the ordering location. Many customers tend to move between various points. In classical routing problems, the customer's delivery location is assumed to be completely known and fixed, and route planning is performed accordingly for that specific location. However, if customers are allowed to move freely within a defined area after placing their order, the traditional notion of a fixed customer location — as conventionally addressed in classical routing problems — is fundamentally challenged. Although this perspective on customer location can significantly enhance customer satisfaction, it substantially complicates planning for the service provider due to the resulting ambiguity and uncertainty regarding the customer's position. This paper aims to formalize this new perspective on customer location and investigates the Vehicle Routing Problem (VRP) under uncertainty in customer locations.

2538-2195/© 2026 The Authors. Published by University of Eyvanekey. This is an open-access article under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license.

1. Introduction

Last-mile logistics is one of the most critical and strategic components of the supply chain because of its direct interaction with end customers. Consequently, logistics service providers must continuously enhance their last-mile operations to maintain their competitive advantage. Traditional deterministic approaches are no longer sufficient to satisfy customers' evolving expectations. Accordingly, maintaining competitiveness requires logistics service providers to employ predictive decision-support systems that explicitly account for uncertainty and stochastic information during the planning process (Mardešić et al., 2023; Birge & Louveaux, 1997)

In most classical Vehicle Routing Problems (VRPs), customer locations are assumed to be fixed and known in advance. However, many real-world urban applications have demonstrated that this assumption is often an oversimplification, since customers may continue moving after placing an order, making their delivery-time locations uncertain. For example, consider a taxi driver who places an order at the beginning of the day. Although the driver's current location can be accurately determined using GPS, the driver continues transporting passengers throughout the city during the day. Consequently, when the service provider plans the delivery route, the driver's exact location at the expected delivery time cannot be known in advance. Instead, the driver's location is represented by a probability distribution over a designated geographical area estimated from historical mobility data. A similar situation arises in emergency response operations. Following a natural disaster, emergency teams continuously move within their assigned service areas while providing assistance. A support vehicle responsible for delivering essential supplies cannot determine the teams' exact locations at the time of delivery during route planning and must therefore rely on probabilistic information about their presence within predefined geographical areas.

In recent years, considerable attention has been devoted to different sources of uncertainty in vehicle routing problems. For example, Wang and Zhao argued that vehicle routing problems have attracted significant research interest with the rapid growth of e-commerce (Wang & Zhao, 2025; Reyes et al., 2017). Their study investigated vehicle routing problems with uncertain customers, highlighting the growing importance of uncertainty, particularly regarding customer-related characteristics. From another perspective, Rezvanian et al. (2025) addressed uncertainty in service times. Building upon these studies, the present research investigates a more general problem in which customer locations are both mobile and stochastic. In the proposed approach, the customer's exact delivery-time location is unknown during the planning process. Instead, each customer is represented by a geographical area, and the customer's location within that area follows a probability distribution.

2. Methodology

This study develops a comprehensive mathematical model formulated as a mixed-integer nonlinear program (MINLP) that incorporates stochastic elements. Each customer is associated with a bounded two-dimensional movement region. These regions can be defined using simple geometric shapes (such as circles or rectangles) or more complex combinations of mathematical functions. Within each region, the probability of the customer's presence at any specific point follows a probability distribution. This distribution can be estimated from historical data using non-parametric methods like kernel density estimation or parametric approaches such as a bivariate normal distribution centered at the region's centroid.

Several fundamental assumptions underpin the model. Each customer remains within their designated geographical area during the service period. All demand for each customer must be fully satisfied in a single period without split deliveries or postponement. Delivery locations are continuous decision variables to be determined by the optimizer. When the actual customer location at delivery time differs from the planned delivery location, two main relocation policies are possible: the customer moves to the vehicle's location or the vehicle diverts to the customer's actual location. The base model adopts the customer-relocation policy, incorporating the expected cost of this movement—calculated as the probability-weighted distance—directly into the objective function.

The objective function minimizes the total system cost, which consists of two primary components. The first is the vehicle travel cost between optimized delivery locations, using appropriate distance metrics (Euclidean for aerial vehicles like helicopters operating in open space, or Manhattan for ground movement within urban street networks). The second component captures the expected relocation cost for customers moving to the designated delivery locations, integrated over the probability distribution. This structure naturally results in a nonlinear objective due to the interaction between location variables, routing decisions, and probabilistic expectations.

Standard VRP constraints are adapted and extended. These include vehicle capacity limits, flow conservation ensuring route continuity, subtour elimination using the Miller-Tucker-Zemlin formulation, and single-vehicle assignment per customer. Additional constraints confine each delivery location within the corresponding customer's movement region. The model also defines parameters such as demand quantities, unit travel costs for vehicles and customers, and vehicle capacities.

For practical implementation and solution in optimization environments, three main approaches are proposed for handling spatial constraints. The first involves direct formulation of region inequalities. The second uses polyhedral approximations for polygonal regions. The third discretizes the continuous space into a grid of candidate points, transforming the problem into a more tractable combinatorial form suitable for standard solvers when nonlinearity becomes prohibitive.

The framework supports extensive sensitivity analysis. Probability distributions can be estimated from historical GPS or tracking data, and their impact on solutions can be evaluated through parametric variations (changing variance or spread) and scenario-based testing with alternative distributions. Comparative analysis of the two relocation policies highlights trade-offs in cost allocation, customer satisfaction, technological requirements, and computational burden. The model is designed with flexibility in mind, allowing straightforward extensions such as time windows, multiple depots, heterogeneous vehicle fleets, fuel constraints, priority customers, and multi-period planning.

To solve the proposed MINLP, the model is implemented in optimization software such as GAMS using appropriate nonlinear solvers. While exact solutions are feasible for small instances, the inherent NP-hard complexity and continuous variables necessitate metaheuristics, large neighborhood search, genetic algorithms, or discretization techniques for larger real-world scales.

3. Results and Discussion

The applicability and behavior of the proposed VRP-MSCL model are demonstrated through a numerical example inspired by a post-disaster emergency supply operation. The scenario involves one central depot using a helicopter to serve five geographical areas with rectangular boundaries. Each geographical area is associated with a customer whose exact location within the area is represented by a probability distribution. Demands are set at varying levels to require multiple routes or capacity-aware sequencing. Probability distributions are modeled as bivariate normal with means at each geographical area's centroid and a variance of one, reflecting a higher probability of customer presence near the centroid of each geographical area. Unit costs for vehicle travel and customer relocation are defined, with sensitivity tested across a wide range.

The model successfully determines optimal delivery locations within each geographical area and the corresponding routing sequence for the helicopter. In the base case with moderate relocation costs, delivery locations strike a balance between efficient global routing and reasonable expected intra-area movement. When customer relocation costs are low relative to vehicle costs, the optimizer may select points slightly offset from centroids to shorten overall vehicle paths. However, as relocation costs increase substantially, delivery locations shift closer to the centroids of the corresponding geographical areas—the areas of highest probability density—thereby minimizing expected customer movement at the expense of somewhat longer vehicle routes.

Extensive sensitivity analyses provide valuable managerial insights. Larger geographical areas and higher variance in probability distributions increase uncertainty and push delivery locations toward regions with higher probability density to hedge against expected relocation efforts. Conversely, smaller geographical areas or more concentrated distributions grant the model greater flexibility to optimize vehicle routes globally. The ratio of customer-to-vehicle relocation costs emerges as a pivotal parameter: higher relative customer relocation costs drive delivery locations toward regions with higher probability density, whereas lower cost ratios favor shorter vehicle routes. Computational performance on the small instance (five geographical areas) shows reasonable solution times, though the solver indicates the returned solution may not be globally optimal, underscoring the challenge of exact optimization even at modest scales.

4. Conclusions

This paper introduces a novel and general mathematical modeling framework for the Vehicle Routing Problem with Mobile Stochastic Customer Locations (VRP-MSCL). By representing customer locations through probability distributions within predefined geographical areas, the model extends classical vehicle routing formulations to account for customer location uncertainty. It bridges important gaps between classical deterministic VRP formulations, generalized routing problems, and emerging concepts of roaming delivery locations, delivering a more realistic tool particularly suited for last-mile logistics in emergency response, disaster relief, and mobile service operations.

Key scientific contributions include the development of a flexible general model capable of recovering classical VRP as special cases, the explicit integration of probability distributions for optimizing delivery locations, detailed policy analysis regarding relocation responsibility between vehicles and customers, practical implementation strategies with multiple spatial handling approaches, and comprehensive sensitivity analysis tools. The emergency services case study demonstrates the model's ability to generate cost-effective delivery locations and vehicle routes under customer location uncertainty.

While the current formulation assumes guaranteed customer presence within defined geographical areas and adopts a risk-neutral expected-cost objective, several promising directions for future research are identified. These include incorporating probabilities of complete customer absence, adding time windows

and other operational constraints, developing multi-period and dynamic online re-optimization capabilities, integrating risk measures such as Value-at-Risk or Conditional Value-at-Risk, and designing efficient metaheuristic algorithms or approximation schemes for large-scale instances. Further extensions could combine the routing model with facility location, inventory management, and real-time data integration from GPS and mobile tracking systems.

From a practical perspective, the proposed approach equips logistics and emergency service providers with a powerful decision-support system, and future developments could combine the proposed framework with real-time tracking infrastructure and periodic re-optimization, enabling its application to dynamic routing environments. As urban mobility patterns evolve and demands for rapid, flexible last-mile services grow, models that embrace spatial and stochastic dynamics—rather than assuming them away—will become increasingly essential for building competitive, resilient, and customer-centric supply chains.

The VRPMSCL framework opens substantial avenues for both theoretical refinement and real-world application, positioning it as a valuable foundation for future studies in stochastic dynamic routing and intelligent logistics systems.

The principal contribution of this research lies in extending roaming delivery location models from deterministic customer locations to stochastic customer locations represented by probability distributions over continuous geographical areas. Unlike existing formulations, the proposed model simultaneously determines delivery locations and vehicle routes while explicitly accounting for uncertainty in customer locations.

Funding

This research received no external funding.

Author contributions

Abolfazl Shafaei: Conceptual research model, Literature review and theoretical background, Data analysis, Statistical analysis draft, Drafting the manuscript, Preliminary review of the report, Research methodology development, Text revision; **Hossein Shams Shemirani:** Supervision, Text revision; **Mohammad Reza Akbari Jokar:** Supervision, Text revision; **Majid Rafiee:** Supervision, Text revision.

Conflicts of interest

There are no conflicts of interest associated with this research.

Acknowledgments

We are grateful to all colleagues who provided insights and expertise that greatly assisted this research. We also thank the anonymous reviewers for their valuable suggestions to improve the paper.

References

Birge, J. R., & Louveaux, F. (1997). *Introduction to stochastic programming*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/0-387-22618-4_3

Grabenschweiger, J., Doerner, K. F., Hartl, R. F., & Savelsbergh, M. W. (2021). The vehicle routing problem with heterogeneous locker boxes. *Central European Journal of Operations Research*, *29*(1), 113-142. https://doi.org/10.1007/s10100-020-00725-2

Mardešić, N., Erdelić, T., Carić, T., & Đurasević, M. (2023). Review of stochastic dynamic vehicle routing in the evolving urban logistics environment. *Mathematics*, *12*(1), 28. https://doi.org/10.3390/math12010028

Ozbaygin, G., & Savelsbergh, M. (2019). An iterative re-optimization framework for the dynamic vehicle routing problem with roaming delivery locations. *Transportation Research Part B: Methodological*, *128*, 207-235. https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.08.004

Ozbaygin, G., Karasan, O. E., Savelsbergh, M., & Yaman, H. (2017). A branch-and-price algorithm for the vehicle routing problem with roaming delivery locations. *Transportation Research Part B: Methodological*, *100*, 115-137. https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.08.004

Reyes, D., Savelsbergh, M., & Toriello, A. (2017). Vehicle routing with roaming delivery locations. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, *80*, 71-91. https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.04.003

Rezvanian, S., Kashan, A. H., Rezvanian, A., & Sabzevari, A. (2025). Intelligent vehicle routing for stochastic service times: a grouping evolution strategy approach. *International Journal of Transportation Science and Technology*. https://doi.org/10.1016/j.ijtst.2025.04.009

Shafaei, A., Jokar, M. R. A., Rafiee, M., & Hemmati, A. (2025). Using the route planning for supplying spare parts to reduce distribution costs: a case study in a roadside assistance company. *International Journal of Shipping and Transport Logistics*, *20*(1), 131-158. https://doi.org/10.1504/IJSTL.2025.144995

Tilk, C., Olkis, K., & Irnich, S. (2021). The last-mile vehicle routing problem with delivery options. *Or Spectrum*, *43*(4), 877-904. https://doi.org/10.1007/s00291-021-00633-0

Wang, X., & Zhao, J. (2025). Distributionally robust optimization of the vehicle routing problem with uncertain customers. *Journal of Industrial and Management Optimization*, *21*(3), 1983-2006. https://doi.org/10.3934/jimo.2024159

Yuan, Y., Cattaruzza, D., Ogier, M., Semet, F., & Vigo, D. (2021). A column generation based heuristic

for the generalized vehicle routing problem with time windows. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, *152*, 102391. https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102391

مهندسی سیستم و بهره‌وری/ سال ۱۴۰۵/ دوره ۶/ شماره ۴/ صفحه ۲۲۳-۲۴۹

نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری

DOI: 10.22034/sep.2026.2088282.1486

مسئله مسیریابی وسایل نقلیه با مشتری متحرک: مدل‌سازی با در نظر گرفتن عدم‌قطعیت مکان مشتری در یک ناحیه جغرافیایی

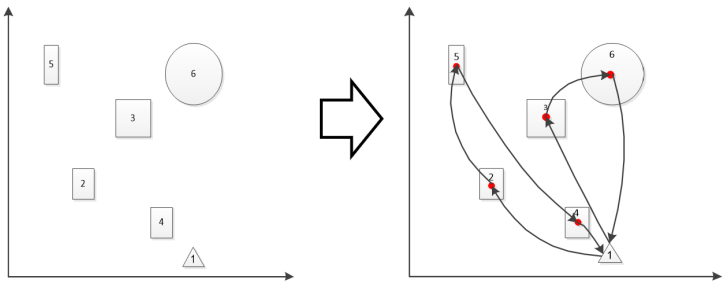
ابوالفضل شفائی[۱]، حسین شمس شمیرانی[۱،*]، محمدرضا اکبری جوکار[۲]، مجید رفیعی[۳]

[۱] استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی گلپایگان، دانشگاه صنعتی اصفهان، گلپایگان، ایران

[۲] استاد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

[۳] دانشیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- مکان مشتری به جای یک نقطه ثابت، با یک منطقه جغرافیایی نشان داده می‌شود.
- مشتریان می‌توانند در هر نقطه‌ای از منطقه جغرافیایی مشخص‌شده خود تردد کنند.
- مدل پیشنهادی به طور همزمان مکان بهینه تحویل و مسیر وسیله نقلیه را تعیین می‌کند.
- مکان مشتری درون منطقه جغرافیایی مشخص‌شده، از یک توزیع احتمال پیروی می‌کند.

چکیده

مشتری با مکان متغیر و تصادفی رویکرد جدیدی است که مسائل مسیریابی را بر اساس آن می‌توان مدل کرد. این واقعیتی است که وقتی مشتری سفارش می‌دهد و خدمات دهنده شروع به برنامه‌ریزی برای ارسال سفارشات می‌نماید، برخی از مشتریان عملاً در محل سفارش، ساکن نمی‌مانند و بسیاری از مشتریان تمایل دارند که در نقاط مختلفی تردد نمایند. در مسائل مسیریابی کلاسیک، محل تحویل سفارش به مشتری کاملاً مشخص است و برنامه‌ریزی هم برای تحویل سفارش به مشتری برای آن محل مشخص‌شده صورت می‌گیرد. اگر به مشتری اجازه داده شود تا بعدازاینکه سفارش خود را ثبت کرد، در یک ناحیه مشخص تردد نماید، عملاً مفهوم مکان آن‌گونه که تاکنون در مسائل کلاسیک مسیریابی به آن پرداخته شده است به چالش کشیده می‌شود. هرچند این نگاه به مکان مشتری می‌تواند رضایت فزاینده مشتری را دربر داشته باشد، اما برنامه‌ریزی را برای ارائه‌دهنده خدمات پیچیده‌تر خواهد کرد، چراکه با ابهام و عدم قطعیت در مکان مشتری مواجه خواهد بود. در این مقاله سعی شده تا این نگاه به مکان مشتری تبیین شده و مسیریابی وسیله نقلیه در شرایط عدم‌قطعیت مکان مشتری موردبررسی قرار بگیرد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۵/۰۲/۱۰

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۳/۲۱

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۰۱

ارائه برخط: ۱۴۰۵/۰۴/۰۱

*نویسنده مسئول:

shafaei@iut.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

مشتری متحرک

مسئله مسیریابی وسایل نقلیه

عدم‌قطعیت

مدل‌های غیرخطی

مدل‌های تصادفی

۲۱۹۵-۲۵۳۸/© ۲۰۲۶ نویسندگان. منتشرشده توسط دانشگاه ایوان‌کی. این یک مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط مجوز Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) است.

۱- مقدمه

لجستیک مایل آخر، به دلیل ارتباط مستقیم با مشتری نهایی، یکی از ارکان حیاتی و استراتژیک در زنجیره تأمین است که متولیان این حوزه برای حفظ جایگاه رقابتی خود، ناگزیر به توجه ویژه به آن هستند. نکته حائز اهمیت این است که رویکردهای قطعیِ سنتی، دیگر پاسخگوی انتظاراتِ در حال تحولِ مشتریان نیست. ازاین‌رو، ارائه‌دهندگان خدمات لجستیکی باید با بهره‌گیری از سیستم‌های پیش‌دستانه و پیش‌بینی‌گر، رویدادهای احتمالی و داده‌های تصادفی را به‌صورت پویا مدل‌سازی و ارزیابی کنند (Mardešić, et al., 2024).

در اکثر مدل‌های کلاسیکِ «مسیریابی وسایل نقلیه[1]» (VRP)، فرض بر این است که مکان مشتریان ثابت و از پیش‌تعیین‌شده است؛ بااین‌حال، بسیاری از کاربردهای شهری و پویا نشان داده‌اند که این فرض، ساده‌سازیِ بیش‌ازحدی است؛ چراکه ممکن است مشتریان پس از ثبت سفارش در حال جابه‌جایی باشند و موقعیت آن‌ها در زمان تحویل نامشخص بماند. برای نمونه، تصور کنید راننده‌ای در ابتدای صبح سفارشی را ثبت می‌کند، اما به‌واسطه ماهیت شغل خود، در طول روز به‌طور پیوسته در سطح شهر در حرکت است. در چنین شرایطی، استفاده از مختصات ثابت برای نمایش محل مشتری منطقی نیست و لذا مدل‌سازی مسیر بهینه، باید مبتنی بر نواحی متغیر با ماهیت تصادفی باشد.

در سال‌های اخیر، مطالعات متعددی به بررسی جنبه‌های گوناگونِ عدم‌قطعیت در مسائل مسیریابی پرداخته‌اند. برای نمونه، وانگ و ژائو بر این باورند که مسئله مسیریابی، در سایه ظهور تجارت الکترونیک، به‌طور گسترده‌ای موردتوجه قرار گرفته است (Wang & Zhao, 2025). آن‌ها در پژوهش خود به مسئله مسیریابی با مشتریان غیرقطعی پرداخته‌اند که نشان‌دهنده اهمیت موضوع عدم‌قطعیت، به‌ویژه در حوزه خواسته‌های مشتریان، برای محققان است. رضوانیان و همکاران نیز از منظری دیگر و با تمرکز بر عدم‌قطعیت در «زمانِ سرویس‌دهی» به این موضوع نگریسته‌اند (Rezvanian, et al., 2025). با تکیه بر این مباحث، پژوهش حاضر گامی فراتر نهاده و مسئله‌ای را بررسی می‌کند که در آن، مکان مشتریان نه‌تنها متغیر، بلکه ماهیتاً تصادفی است.

در این رویکرد، محل دقیق مشتری برای تحویل در زمان برنامه‌ریزی مشخص نیست و تنها می‌توان ناحیه‌ای حرکتی برای او ترسیم کرد که دارای توزیع احتمال است.

۲- معرفی مسئله

یک انبار یا خدمت‌دهنده لجستیکی را در نظر بگیرید که باید سفارش‌های n مشتری را، که با اندیس i نشان داده می‌شوند، در یک بازه زمانی مشخص تأمین کند. این مشتریان، هر یک در یک ناحیه جغرافیایی در حال حرکت‌اند؛ به‌گونه‌ای که مکان آن‌ها در کوتاه‌مدت قابل‌شناسایی است، اما در بازه زمانی بلندمدت، تعیین محل دقیق مشتری امکان‌پذیر نیست. استفاده از VRP برای یافتن مسیر حرکت وسایل امدادی، در مطالعات متعددی مورداستفاده قرار گرفته است. شفائی و همکاران (۲۰۲۵) از تکنیک‌های مسیریابی بهره گرفته‌اند تا در یک نمونه عملی، قطعات و لوازم موردنیاز را به تعمیرکاران و خودروهای امدادی یک شرکت امدادخودرویی برسانند (Shafaei, et al., 2025). هرچند ماهیت مسئله‌ای که آنان بررسی کرده‌اند، به مشتریان متحرک مربوط می‌شود، اما آنان با ساده‌سازی مسئله، مکان امدادگران را ثابت فرض کرده‌اند. این ایده که امدادگران نیازمند پشتیبانی از یک مرکز هستند و برای انجام صحیح وظایف خود به تأمین مستمر نیاز دارند، در مقاله شفائی و همکاران به‌خوبی موردتوجه قرار گرفته است. بنابراین، رساندن تجهیزات و اقلام امدادی می‌تواند در حوادث طبیعی نیز موردتوجه قرار گیرد.

تصور کنید در منطقه‌ای از کشور، زلزله‌ای رخ داده است. در این منطقه که شهرها و روستاهای متعددی دارد، امدادگران بسیاری به هر یک از این شهرها و مناطق اعزام می‌شوند. روشن است که هر یک از این اکیپ‌های امدادرسان به پشتیبانی نیاز دارند و فرض کنید این پشتیبانی قرار است توسط یک بالگرد انجام شود. هنگامی‌که برنامه‌ای تدارک می‌بینید تا بالگرد را برای پوشش، مثلاً، ده شهر در ناحیه زلزله‌زده اعزام کنید، شما از الان، از محل و موقعیت اکیپ فعال در هر یک از شهرها هنگامی که بالگرد را ملاقات می‌کنند، اطلاع ندارید. آنان بسته به محل مجروحان و آسیب‌دیدگان، در شهر تحت پوشش خود در

[1] Vehicle Routing Problem (VRP)

حال تردد هستند. بنابراین، این‌که در کدام منطقه از شهر باید خدمات پشتیبانی را به امدادگران برسانید، مسئله‌ای مهم است که می‌توان آن را مدل‌سازی کرد.

در چنین شرایطی، از دیدگاه مسئله مسیریابی، مشتری i در یک ناحیه جغرافیایی محصور است که می‌توان آن را با عدد تابع ریاضی $m(i)$ نشان داد. به‌بیان‌دیگر، ناحیه‌ای که مشتری در آن تردد می‌کند، به‌وسیله توابع $F_{i,m(i)}$ به‌صورت ریاضی مشخص می‌شود. هرچند محل استقرار مشتری را در بازه زمانی بلندمدت نمی‌توان تعیین کرد، اما فرض بر این است که بر اساس شدت خسارات و میزان نیاز شهروندان به امداد، احتمال حضور امدادگران در نقاط مختلف این ناحیه از یک تابع توزیع احتمالی تبعیت می‌کند که می‌توان آن را با P_i نمایش داد. برای یافتن فاصله بین دو اکیپ امدادی i و j نیز می‌توان از یک تابع ریاضی فاصله با نماد Fd استفاده کرد. در چنین شرایطی، یافتن پاسخ مسئله مسیریابی وسایل نقلیه، به دو پرسش اساسی منتهی می‌شود:

- الف) هر اکیپ امدادی در چه مکانی باید ملاقات شود؟ (x_i, y_i)
- ب) توالی ملاقات اکیپ‌های امدادی توسط بالگرد (هلیکوپتر) به چه صورت باید باشد؟ $(w_{i,j}^v)$

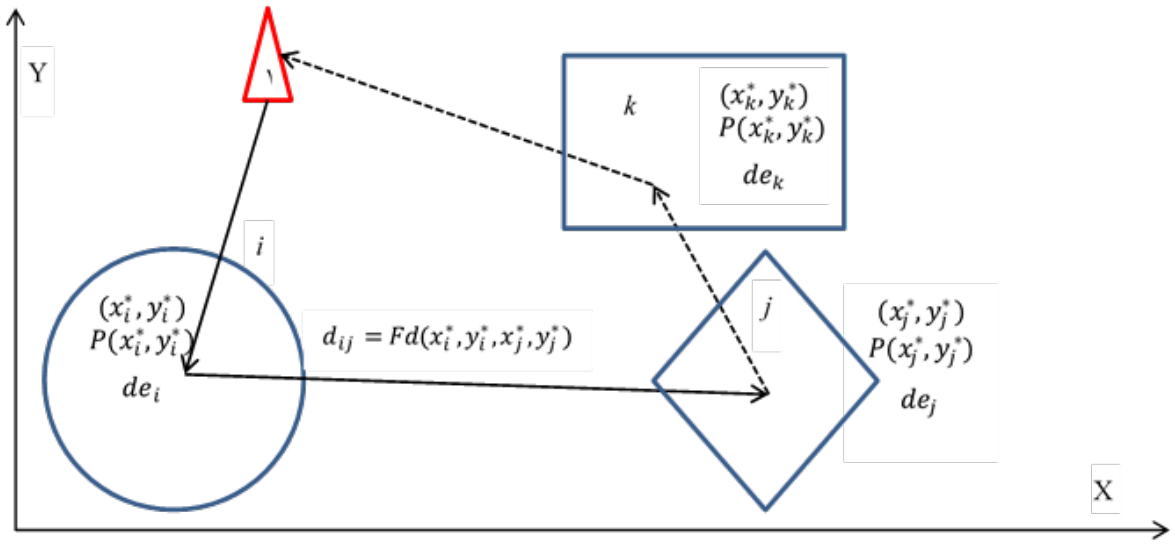
لذا تعین محل ملاقات هر اکیپ امدادی و به دنبال آن تور تشکیل‌شده برای ملاقات این اکیپ‌های امدادی و تحویل سفارشات آن‌ها، ما را به اهداف مدل که می‌تواند کمترین فاصله یا کمترین هزینه و ... باشد، برساند.

همان‌گونه که در شکل ۱ ملاحظه می‌شود، مسئله حاضر نوعی مسئله مسیریابی است با این تفاوت اساسی که مختصات استقرار مشتری (x_j^*, y_j^*) که در مدل‌های کلاسیک به‌عنوان داده‌های ورودی پیش‌فرض در نظر گرفته می‌شوند، در اینجا مجهول بوده و باید توسط مدل به‌عنوان «خروجی» تعیین شوند.

۲-۱- مثال مفهومی

فرض کنید یک کامیون امدادرسانی غذایی باید بسته‌ای را به تکنسینی تحویل دهد که در حال تعمیر تجهیزات در یک شهرک صنعتی است. این تکنسین در طول روز میان چندین کارگاه در تردد است و محل دقیق او در زمان تحویل مشخص نیست؛ اما می‌دانیم که او در محدوده‌ای به ابعاد تقریبی ۲ در ۲ کیلومتر فعالیت می‌کند. همچنین، بر اساس داده‌های تاریخی، احتمال حضور وی در نزدیکیِ مرکز این محدوده بیشتر از حاشیه‌هاست (توزیع نرمال). کامیون باید تصمیم بگیرد که: ۱) دقیقاً در چه نقطه‌ای از این محدوده با تکنسین ملاقات کند و ۲) چه توالی‌ای از ملاقات با سایر تکنسین‌ها (که هرکدام در محدوده‌ای مشابه حضور دارند) را طی کند تا تابع هدف متشکل از مجموع هزینه‌های جابه‌جایی کامیون و مسافت طی‌شده توسط تکنسین‌ها برای رسیدن به نقطه ملاقات کمینه شود.

علاوه بر تفاوت یادشده در تعیین مکان مشتریان، لازم است فرضیات زیر جهت توسعه و مدل‌سازی مسئله در نظر گرفته شوند:



شکل ۱. نمای شماتیک از مسئله مسیریابی با مکان متغیر و تصادفی مشتری.

Figure 1. Schematic representation of the VRP with variable and stochastic customer locations.

- **فرض ۱:** هر مشتری i در یک ناحیه دوبعدیِ محدود به تابع $F_{i,m(i)}(x_i, y_i)$ در حال تردد است.
- **فرض ۲:** ناحیه تردد هر مشتری می‌تواند به‌صورت ساده (اشکال هندسی استاندارد) یا پیچیده (ترکیب چندین تابع) تعریف شود.

مثال: ناحیه دایره‌ای به مرکز a و b و شعاع r برای مشتری i، با یک تابع $F_{i,1}$ (یعنی $m(i) = \{1\}$) به‌صورت رابطه (۱) نمایش داده می‌شود:

$$(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 \leq r^2 \qquad (۱)$$

یا یک ناحیه مستطیل‌شکل برای مشتری i، با استفاده از چهار تابع $F_{i,m(i)}$ (یعنی $m(i) = \{1,2,3,4\}$) به‌صورت رابطه (۲) قابل‌نمایش است:

$$\begin{aligned} &F_{i,1}: x_i \geq a_1 \\ &F_{i,2}: x_i \leq a_2 \\ &F_{i,3}: y_i \geq b_1 \\ &F_{i,4}: y_i \leq b_2 \end{aligned} \qquad (۲)$$

- **فرض ۳:** فاصله بین دو مشتری $(d_{i,j})$ با استفاده از تابع فاصله $Fd(x_i, x_j, y_i, y_j)$ محاسبه می‌شود. این فاصله می‌تواند بر اساس روش‌های مختلفی، ازجمله «فاصله اقلیدسی» (مسیر مستقیم) یا «فاصله منهتنی» (مسیرهای عمود بر هم)، محاسبه گردد.

انتخاب تابع فاصله به ماهیت شبکه حمل‌ونقل بستگی دارد: فاصله اقلیدسی (مستقیم) زمانی مناسب است که وسیله نقلیه قادر به حرکت آزاد در فضای بدون مانع باشد (مانند بالگرد، پهپاد یا مناطق باز) درحالی‌که فاصله منهتنی (عمود برهم) برای محیط‌های شهری با خیابان‌های شبکه‌ای و بلوک‌بندی شده کاربرد دارد که حرکت فقط در امتداد محورهای افقی و عمودی امکان‌پذیر است. در مثال عددی این مقاله (بخش ۵)، برای حرکت بالگرد از فاصله اقلیدسی و برای جابجایی اکیپ‌های امدادی درون مناطق شهری از فاصله منهتنی استفاده شده است.

- **فرض ۴:** احتمال حضور مشتری در هر نقطه از ناحیه تعیین‌شده، از یک تابع توزیع احتمال مکانی $P_i(x_i, y_i)$ تبعیت می‌کند. فرض بر این است که این تابع توزیع احتمال، بر اساس داده‌های تاریخی قابل‌استخراج و تحلیل است.
- **فرض ۵:** در هر دوره زمانی، تحویلِ کلِ تقاضای هر مشتری (de_i) باید به‌طور کامل در همان دوره انجام شود (فرضِ عدم امکانِ تجمیع یا تأخیرِ تقاضا).
- **فرض ۶:** مشتری در زمان تحویل، لزوماً در ناحیه جغرافیاییِ تعریف‌شده حضور دارد.
- **فرض ۷:** باوجودآنکه مشتری i در ناحیه تعریف‌شده حضور دارد، ممکن است در لحظه تحویل، در مختصاتِ تعیین‌شده برای ملاقات (x_i, y_i) حضور نداشته و در موقعیت دیگری با مختصات (x_i', y_i') باشد. در این شرایط، دو سیاست کلی قابل‌تصور است:
  ۱) مشتری i از موقعیت (x_i', y_i') خود را به محل وسیله نقلیه v در مختصات (x_i, y_i) برساند.
  ۲) وسیله نقلیه v از محلِ ازپیش‌تعیین‌شده (x_i, y_i) خود را به موقعیتِ واقعیِ مشتری i در (x_i', y_i') برساند.

تأثیر انتخاب هر یک از این سیاست‌ها مستقیماً در تابع هدفِ مدل منعکس می‌شود. در این پژوهش، «سیاست اول» به‌عنوان مبنا انتخاب‌شده و هزینه جابه‌جاییِ مشتری برای رسیدن به نقطه ملاقات، در مدل لحاظ گردیده است.

۲-۲- تعریف صوری ناحیه حرکت

ناحیه حرکتِ مشتری i، به‌صورت یک مجموعه فشرده[1] و همبند[2] در فضای $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌شود که با معادلات زیر مشخص می‌گردد:

$$\mathrm{R}_i = \{ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in R^2 \mid F_{i,m}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq b_i,\ \mathrm{m} = 1, \ldots, M_i \}$$

که در آن $F_{i,m}$ توابع پیوسته (معمولاً خطی یا درجه دوم) و m و b_i مقادیر ثابت هستند.

ویژگی‌های ناحیه حرکت به شرح زیر است:

۱) **مرز بسته**[3]: کلیه نقاط مرزی که در آن $F_{i,m}(x, y) = b_{i,m}$ برای حداقل یک m برقرار باشد، جزئی از ناحیه محسوب می‌شوند. این فرض تضمین می‌کند که جواب بهینه (نقطه ملاقات) در صورت وقوع روی مرز، معتبر است.

۲) **همپوشانی**[4]: در مدل پایه این مقاله، فرض می‌شود نواحی حرکت مشتریان مختلف با یکدیگر همپوشانی ندارند. به زبان ریاضی یعنی

[1] Compact
[2] Connected
[3] Closed Boundary
[4] Overlap

$\left(\text{Ri} \cap \text{Rj} = \emptyset \text{ برای } \text{i} \neq \text{j}\right)$. این فرض برای جلوگیری از ابهام در انتساب مشتری به‌وسیله نقلیه در نظر گرفته شده است. درصورتی‌که کاربرد عملی نیاز به همپوشانی داشته باشد، می‌توان با اضافه کردن قواعد تخصیص مبتنی بر اولویت یا فاصله، مدل را تعمیم داد.

۳) **محدودیت اندازه و شکل:** مدل هیچ محدودیت ذاتی بر اندازه یا شکل ناحیه اعمال نمی‌کند. ناحیه می‌تواند هر شکل محدب یا غیر محدب (با استفاده از توابع $F_{i,m}$ متعدد) داشته باشد. بااین‌حال، از منظر عددی، نواحی با مساحت بسیار بزرگ (نسبت به کل فضای مسئله) ممکن است همگرایی حل‌کننده‌های غیرخطی را با دشواری مواجه کنند که در این صورت می‌توان با گسسته‌سازی (رویکرد گرید) این مشکل را مدیریت کرد.

۲-۳- رویکردهای پیاده‌سازی

به‌منظور پیاده‌سازی و حل مدل ریاضی ارائه‌شده در محیط‌های بهینه‌سازی (نظیر GAMS یا Python با بهره‌گیری از کتابخانه‌های Pyomo، Gurobi و یا SciPy)، سه رویکرد اصلی قابل‌اتخاذ است:

۱) **رویکرد ۱ (نامساوی مستقیم):** در این روش، توابع $F_{i,m}(x,y) \leq b_{i,m}$ مستقیماً به‌عنوان محدودیت‌های مدل تعریف می‌شوند. این رویکرد برای نواحی حرکتی که توسط توابع خطی یا درجه دوم توصیف می‌شوند، از کارایی و دقت بالایی برخوردار است.

۲) **رویکرد ۲ (چندضلعی):** در این رویکرد، ناحیه حرکت به‌عنوان یک چندضلعی محدب (یا ترکیبی از چندضلعی‌های ساده) مدل‌سازی می‌شود. پیاده‌سازی این رویکرد با استفاده از مختصات باریسنتریک[1] یا مجموعه‌ای از محدودیت‌های خطی[2] صورت می‌گیرد که برای مسائل با هندسه قطعه‌قطعه خطی[3] ایده‌آل است.

۳) **رویکرد ۳ (گرید گسسته):** در مواردی که حل مدل در فضای پیوسته به دلیل پیچیدگی‌های غیرخطی با چالش مواجه باشد، ناحیه حرکت به K نقطه گسسته (مانند شبکه‌بندی منظم با گام Δ) تقریب زده می‌شود. در این حالت، متغیرهای مکان (x_i, y_i) از میان نقاط تعریف‌شده در شبکه انتخاب می‌گردند. این رویکرد، مسئله را به یک مدل ترکیبی تبدیل کرده و به‌طور قابل‌توجهی فضای جستجو و پیچیدگی محاسباتی را برای حل‌کننده‌های استاندارد تسهیل می‌نماید.

۲-۴- برآورد توزیع احتمال مکانی و تحلیل حساسیت

۲-۴-۱- روش برآورد توزیع از داده‌های تاریخی

فرض می‌شود برای هر مشتری i، مجموعه‌ای از T مشاهده تاریخی از موقعیت مکانی وی در زمان‌های مشابه (مثلاً همان ساعت روز در روزهای گذشته) در دسترس باشد $\{(x_{i,t}, y_{i,t})\}$. توزیع احتمال مکانی $P_i(x_i, y_i)$ به یکی از دو روش زیر برآورد می‌شود:

- **روش ناپارامتری تخمین چگالی هسته**[4]: در رابطه (۳)، K تابع هسته (مانند گوسی) و h پارامتر پهنای باند است که با روش اعتبارسنجی متقابل[5] تعیین می‌شود. این روش نیازمند فرض پارامتریک خاصی نبوده و انعطاف‌پذیری بالایی دارد.

$$P_i(x,y) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} K\left(\frac{x - x_{i,t}}{h}\right) K\left(\frac{y - y_{i,t}}{h}\right) \qquad (۳)$$

- **روش پارامتریک توزیع نرمال دومتغیره:** در صورت وجود شواهد کافی مبنی بر متمرکز بودن توزیع حول یک مرکز (مانند مرکز ثقل ناحیه)، از توزیع نرمال دومتغیره استفاده می‌شود که پارامترهای $(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ با روش حداکثر درست‌نمایی (MLE) از داده‌های تاریخی تخمین زده می‌شوند (رابطه (۴)).

[1] Barycentric Coordinates
[2] Linear Inequalities
[3] Piecewise Linear
[4] Kernel Density Estimation
[5] Cross-Validation

$$P_i(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right) \quad (۴)$$

نوع توزیع فرض‌شده در این مقاله در ادامه توضیح داده شده است. در مثال عددی ارائه‌شده در بخش ۵، به‌منظور سادگی و قابلیت تکرار، توزیع نرمال دومتغیره با میانگین مرکز ثقل ناحیه و واریانس ۱ (و کوواریانس صفر) فرض شده است. این فرض معادل آن است که احتمال حضور مشتری در نزدیکی مرکز ناحیه بیشتر از حاشیه‌ها باشد که در بسیاری از کاربردهای شهری (مانند تراکم جمعیت در مرکز مناطق) واقع‌بینانه است. در کاربردهای واقعی، نوع توزیع باید بر اساس داده‌های تاریخی و آزمون‌های برازش (مانند آزمون کولموگروف-اسمیرنف یا چی‌دو) تعیین گردد.

۲-۳-۲- تحلیل حساسیت مدل به خطای برآورد

برای بررسی تأثیر خطای برآورد توزیع بر جواب نهایی، دو نوع تحلیل حساسیت پیشنهاد می‌شود:

- **تحلیل حساسیت پارامتریک:** پارامترهای توزیع (مانند σ در توزیع نرمال) به‌صورت سیستماتیک در بازه $[0.5\sigma_0, 2\sigma_0]$ تغییر داده شده و تغییرات در مقدار تابع هدف و نقاط ملاقات بهینه ثبت می‌شود. انتظار می‌رود با افزایش واریانس، مدل نقاط ملاقات را به سمت مرکز ثقل ناحیه متمایل کند تا امید ریاضی هزینه جابجایی مشتری کاهش یابد.
- **تحلیل حساسیت مبتنی بر سناریو:** چندین توزیع جایگزین (یکنواخت، چوله، دومداله) با فاصله‌های واگرایی معین (مانند واگرایی کولبک-لیبلر) نسبت به توزیع برآوردشده در نظر گرفته شده و مدل مجدداً حل می‌شود. اگر تغییر در تابع هدف کمتر از یک آستانه (مثلاً ۵٪) باشد، مدل نسبت به خطای برآورد ناپایدار[1] محسوب می‌شود؛ در غیر این صورت، نیاز به جمع‌آوری داده‌های بیشتر یا استفاده از رویکرد استوار[2] است.

توصیه عملی این است که در پیاده‌سازی واقعی، ابتدا مدل با توزیع برآوردشده حل می‌شود. سپس با استفاده از روش بوت‌استرپ[3]، B نمونه از داده‌های تاریخی بازنمونه‌گیری شده، توزیع مجدداً برآورد و مدل حل می‌گردد. انحراف معیار مقادیر تابع هدف در این B تکرار، معیاری از ریسک ناشی از خطای برآورد ارائه می‌دهد. در مثال عددی این مقاله، با فرض واریانس ۱ و خطای ۱۰٪ در برآورد آن، تغییر تابع هدف کمتر از ۳٪ مشاهده شد که نشان‌دهنده پایداری نسبی مدل در این سناریوی خاص است.

۲-۵- تحلیل و مقایسه دو سیاست جابجایی

برای تعریف دقیق این دو سیاست، فرض کنید که وسیله نقلیه اعزامی شده، در نقطه توافق‌شده $A_i = (x_i, y_i)$ حاضر شود، اما مشتری یا خدمت گیرنده، در نقطه $A'_i = (x'_i, y'_i)$ حضور داشته باشد. دو سیاست زیر قابل‌تعریف است:

- **سیاست اول (جابجایی مشتری):** مشتری خود را از A_i به A'_i می‌رساند. در این حالت، وسیله نقلیه (خدمت دهنده) از مسیر خود منحرف نشده و زمان/هزینه اضافی متوجه مشتری می‌شود.
- **سیاست دوم (جابجایی وسیله نقلیه):** وسیله نقلیه پس از اطلاع از موقعیت واقعی مشتری، مسیر خود را تغییر داده و از A_i به A'_i حرکت می‌کند. در این حالت، زمان و هزینه اضافی متوجه سیستم توزیع (ارائه‌دهنده خدمات) می‌شود.

نحوه مدل‌سازی هزینه و ریسک در هر سیاست در ادامه توضیح داده شده است. در این مقاله، سیاست اول به کار گرفته شده است. هزینه جابجایی مشتری در تابع هدف به‌صورت امید ریاضی فاصله بین A_i و A'_i ظاهر می‌شود؛ یعنی، $C_c \times E[Fd(A_i, A'_i)]$، که در آن C_c هزینه واحد جابجایی مشتری است. برای سیاست دوم، مدل به‌صورت $C_T \times E[Fd(A_i, A'_i)]$ تعدیل می‌شود که در آن C_T هزینه واحد جابجایی وسیله نقلیه است. تفاوت اساسی در ضریب هزینه C_c در مقابل C_T و همچنین تأثیر آن بر مسیر کلی

[1] Robust
[2] Robust Optimization
[3] Bootstrap

تور (در سیاست دوم، مسیر وسیله نقلیه تغییر می‌کند و محدودیت‌های توالی (۱۳) و (۱۷) باید بازتعریف شوند) می‌باشد.

برای مدل‌سازی ریسک فراتر از هزینه، می‌توان از معیارهای زیر استفاده کرد:

- (VaR)[1]: کمینه فاصله‌ای α که با احتمال $1-\alpha$ فاصله واقعی از آن کمتر است.
- (CVaR)[2]: میانگین فاصله در بدترین β درصد حالات.

در مدل پایه این مقاله، صرفاً از امید ریاضی (رویکرد ریسک خنثی) استفاده شده است.

در جدول **۱** شرایط برتری هر سیاست آورده شده است.

۳- بررسی ادبیات

سیستم مسئله مسیریابی را به‌صورت ساده، می‌توان مسئله طراحی تورهای تحویل سفارشات از انبارها به سمت مشتریانی تعریف کرد که در مناطق جغرافیایی پراکنده مستقر هستند و این طراحی باید با در نظر گرفتن برخی محدودیت‌ها انجام شود. در مسیریابی وسایل نقلیه کلاسیک (ساده)، مجموعه‌ای از رأس‌ها و یال‌ها در یک گراف در نظر گرفته می‌شود. گراف G را با رأس‌های V و یال‌های A در نظر بگیرید، به‌طوری‌که $G(V,A)$ را داشته باشیم؛ در اینجا مجموعه رأس‌های nتایی به این صورت تعریف می‌شود: $V=\{1,2,\dots,n+1\}$ که در آن گره ۱ نماد انبار و سایر اعداد نشان‌دهنده مشتریان می‌باشند. مجموعه یال‌های این گراف نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $A=\{(i,j):i,j\in V, i\neq j\}$. در مسئله مسیریابی کلاسیک، معمولاً V تعداد وسایل نقلیه را در نظر می‌گیرد و هر یک از مشتریان مستقر در گره‌ها نیز دارای de_i واحد تقاضا هستند که باید تأمین شود. برای حرکت از یک گره i به گره j، باید هزینه‌ای برابر با C_{ij} واحد پرداخت شود (Laporte, 2009).

ساده‌ترین مدل مسیریابی، مدل تعمیم‌یافته فروشنده دوره‌گرد است. در این مدل، ما یک تابع هدف خواهیم داشت که به دنبال حداقل کردن هزینه‌های جابه‌جایی وسیله نقلیه در گذر از تمام گره‌ها می‌باشد. تفاوت مسیریابی با فروشنده دوره‌گرد در این است که در مسئله مسیریابی، یک بُعد دیگر به تابع هدف اضافه می‌شود و آن وسایل نقلیه است. در مسئله فروشنده دوره‌گرد، تنها یک تور وجود دارد، اما در مسئله مسیریابی، بسته به تعداد وسایل نقلیه‌ای که در برآورده کردن تقاضای مشتریان نقش ایفا می‌کنند، می‌تواند چندین تور وجود داشته باشد. محدودیت‌هایی که در مسئله مسیریابی کلاسیک مطرح است، تقریباً همان محدودیت‌هایی هستند که در مسئله فروشنده دوره‌گرد نیز مشاهده می‌شود؛ با این تفاوت که در مسئله مسیریابی، یک بُعد به ابعاد متغیر تصمیم اضافه خواهد شد؛ چراکه باید مشخص شود هر وسیله نقلیه در کدام تورها حرکت می‌کند. بنابراین، می‌توان مسئله فروشنده دوره‌گرد را زیرمجموعه‌ای از مسئله مسیریابی وسایل نقلیه قلمداد کرد که در آن تنها یک وسیله نقلیه وجود دارد.

دسته دیگری از محدودیت‌ها نیز به مرکز خدمت‌دهی یا همان انبار برمی‌گردد. هر وسیله نقلیه باید یک‌بار از انبار خارج شده و یک‌بار نیز به انبار بازگردد. تنها نکته قابل‌توجه این است که در مسئله فروشنده دوره‌گرد، گره شروع با سایر گره‌ها تفاوتی ندارد و فروشنده از آن گره هم یک‌بار وارد و هم یک‌بار خارج می‌شود؛ ولی در مسئله مسیریابی، به گره اصلی (انبار) باید به تعداد وسایل نقلیه یال وارد شده و به همان تعداد نیز یال خارج شود.

دسته دیگری از محدودیت‌ها نیز به عدم تشکیل «زیرتور» بازمی‌گردد. در طراحی تور، این امکان وجود دارد که مدل به‌گونه‌ای عمل کند که شهرها در دو تور جداگانه به هم وصل شوند، به‌طوری‌که بعضی از تورها امکان دسترسی به انبار اصلی را نداشته باشند. همین اتفاق در مسئله فروشنده دوره‌گرد نیز امکان وقوع دارد؛ یعنی به‌جای اینکه تمام شهرها در یک تور قرار گیرند، دو تور مجزا طراحی شود. در این حالت، اگر دو تور مجزا طراحی شوند که با هم ارتباطی نداشته باشند اما تمام شهرها را پوشش دهند، تمام محدودیت‌های مسئله ارضاء می‌شود، ولی تور موردنظر ما (یک تور واحد و منسجم) شکل نخواهد گرفت. لذا باید دسته محدودیت‌هایی تعریف شود که از ایجاد زیرتور جلوگیری کرده و تضمین کند که در هر تور، حتماً انبار حضور داشته باشد.

[1] Value at Risk
[2] Conditional Value at Risk

جدول ۱. مقایسه شرایط استفاده از سیاست‌های جابجایی

Table 1. Comparison of different relocation policy scenarios.

معیار	سیاست اول (جابجایی مشتری)	سیاست دوم (جابجایی وسیله نقلیه)
نسبت هزینه‌ها	$C_c < C_T$	$C_t < C_C$
ماهیت سفارش	سفارشات کوچک و غیر حساس به زمان	سفارشات بزرگ، فاسدشدنی یا حساس به زمان
تکنولوژی موردنیاز	ردیابی مشتری + دسترسی به صندوق	سیستم ناوبری پویا و ارتباط لحظه‌ای
بار محاسباتی	کمتر (مسیر ثابت)	بیشتر (نیاز به بازبهینه‌سازی)
رضایت مشتری	متوسط (احتمال خستگی مشتری)	بالا (خدمات درب منزل واقعی)
کاربردهای مناسب	تحویل بسته در خودرو	امداد و نجات، تحویل دارو، سرویس‌های لوکس

۳-۱- مسئله مسیریابی وسایل نقلیه با مشتری متحرک[1]

نخستین مقاله‌ای که در این زمینه به چاپ رسیده است، مربوط به سال ۲۰۱۷ می‌باشد که «مشتری متحرک» در این مقاله ارائه شده است و رِیز و همکارانش مسئله مسیریابی با مشتری متحرک را در آن تشریح می‌کنند (Reyes, et al., 2017). در ادبیات تحویل اقلام به مشتریان، اصطلاحی تحت عنوان تحویل مرحله آخر[2] وجود دارد که عمدتاً نحوه تحویل کالا و روش‌های مختلف تحویل کالا به مشتری نهایی را بررسی می‌کنند. نویسندگان مقاله، مسئله مسیریابی با مشتری متحرک را یک نوآوری در حوزه مسائل «تحویل مرحله آخر» قلمداد می‌کنند. در مسائل مربوط به تحویل مرحله آخر، عمدتاً به نحوه رساندن محموله پستی به دست مشتری نهایی پرداخته می‌شود. در رابطه با تحویل مرحله آخر، مقالات متعددی وجود دارد که روش‌های مختلفی را برای رساندن اقلام موردنیاز به دست مشتریان، ارائه کرده‌اند. به‌عنوان‌مثال، مسائل مسیریابی، با در نظر گرفتن پهپادها، از این نوع مسائل هستند. درواقع، استفاده از پهپاد[3]، یک راهکار، در عملیات لجستیکی رساندن کالا به مشتری در بخش تحویل مرحله آخر می‌باشد (Murray & Chu, 2015).

رِیز و همکارانش، یک مفهوم جدیدی را در تحویل کالا توسط فروشگاه‌های اینترنتی توسعه داده‌اند. مبنای کار آن‌ها این بوده است که یک مشتری در طی روز، تغییر مکان را از خانه شروع کرده و پس از طی مسیر و توقف در مکان‌های مشخص و متعدد، مجدد به خانه برمی‌گردد. حال فروشنده که کالایی را برای مشتری می‌خواهد ارسال کند، در هر کجای این تور که خودرو مشتری توقف می‌کند یا در خانه مشتری، امکان تحویل وجود دارد. اصطلاحی که برای این موضوع به کار می‌برند، تحت عنوان تحویل صندوقی[4] می‌باشد؛ و منظور این است که تحویل‌دهنده، در مسیر حرکت خود که خودرو مشتری را ملاقات می‌کند، کالای موردنظر مشتری را در صندوق خودروی وی خواهد گذاشت. البته این فرآیند نیازمند تکنولوژی است. ابتدا باید بتوان مشتری را با استفاده از تلفن همراه، رصد کرد. همچنین مشتری باید بتواند با استفاده از تلفن همراه خود صندوق‌عقب خودروی خود را برای متصدی تحویل کالا باز کند تا کالا در آن قرار بگیرد. آن‌ها، مسئله تعریف‌شده را با استفاده از برنامه‌ریزی عددصحیح مدل کرده و برای حل آن یک روش هیوریستیک ارائه کرده‌اند. ازآنجایی‌که آن‌ها برای نخستین بار بوده است که مسئله VRPRDL را مطرح می‌کنند، برای بررسی کارآیی الگوریتم ارائه شده خود، آن را در ابعاد کوچک با جوابهای به‌دست‌آمده از حل مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مقایسه کرده‌اند.

به اعتقاد رِیـز و همکاران (۲۰۱۷)، مسئله مسیریابی با در نظر گرفتن مکان تحویل متغیر، زیرمجموعه‌ای از مسائل مسئله مسیریابی عمومی شده[5] می‌باشد (Reyes, et al., 2017). در GVRP مسیریابی در بین مجموعه‌ای از مشتریان صورت می‌گیرد که این مشتریان دسته‌بندی‌شده و خودروی که اقلام را به دست این مشتریان می‌رساند، کافی است تا حداقل یکی از مشتریان هر دسته را ملاقات نماید. مقالات متعددی نیز در این حوزه منتشر شده است که علاوه بر تشریح این نوع از مسائل مسیریابی، به روش‌های حل و کاربردهای آن‌ها نیز

[1] Vehicle Routing Problem with Roaming Delivery Location (VRPRDL)
[2] Last-Mile delivery
[3] Drone
[4] Trunk Delivery
[5] General Vehicle Routing Problem (GVRP)

پرداخته‌اند. در این حوزه می‌توان به کارهای صورت گرفته توسط لاپورت و همکاران (Laporte et al., 1989)، ماچا و همکاران (Moccia, et al., 2012)، یوآن و همکاران (Yuan et al., 2021) اشاره کرد.

البته باید توجه داشت که یک تفاوت اساسی بین GVRP و VRPRDL وجود دارد. در مسائل GVRP مشتریان متفاوت هرکدام در یک نقطه جغرافیایی مشخص مستقر هستند و ما با توجه به شرایط مسئله، مشتریان را دسته‌بندی کرده و از بین هر دسته متعهد می‌شویم که حداقل به یک مشتری در هر دسته سرویس دهیم. اما در مسئله مسیریابی با مشتری متحرک، یک مشتری مشخص در زمان‌های متفاوت، در مکان‌های متفاوت حضور پیدا می‌کند و ما متعهد هستیم همه مشتریان را تحت پوشش سرویس خود درآوریم، اما اینکه هر مشتری در کدام نقطه جغرافیایی ملاقات شود، مسئله‌ای است که باید مدل طراحی‌شده بر اساس متغیر بودن مکان مشتری، به آن جواب دهد. بنابراین هرچند تحقیق انجام‌شده توسط ما، به‌طور مشخص ادامه کار ریز و همکاران (Reyes, et al., 2017) محسوب می‌شود، اما با این استدلال می‌تواند به‌نوعی توسعه GVRP با در نظر گرفتن احتمال حضور برای مشتریان نیز محسوب شود.

مقاله دومی که در این حوزه منتشر شده است، مربوط به اوزبایجین و همکارانش می‌باشد که این مقاله نیز در سال ۲۰۱۷ منتشر شده است و در تیم نویسندگان این مقاله و مقاله قبلی، یک فرد مشترک وجود دارد (Ozbaygin et al., 2017). مقاله قبلی، به‌عنوان مرجع این مقاله معرفی شده است. آن‌ها در این مقاله، برای مدل تعریف‌شده در قالب مشتری متحرک، الگوریتم حلی را ارائه کرده‌اند که مبتنی بر الگوریتم شاخه و قیمت[1] می‌باشد. همچنین، نویسندگان، این مسئله را با مسئله پوششی مدل کرده و از روش شاخه و قیمت برای حل آن استفاده کرده‌اند.

مقاله سوم در این زمینه یک مقاله کنفرانسی است که در سال ۲۰۱۸ به چاپ رسیده است. در این مقاله، مسئله مسیریابی با مشتری متحرک را در حالتی موردبررسی قرار داده‌است که زمان سفر بین مشتریان غیرقطعی است[2].

نویسندگان در مقاله، ابتدا یک مدل ریاضی برای مسئله ارائه کرده‌اند و سپس با استفاده از شبیه‌سازی با روش مونت‌کارلو و الگوریتم تهاجمی[3] ابتکاری، نسبت به حل مسئله اقدام شده است (Lombard, et al., 2018).

دیگر مقاله‌ای که در این حوزه یافت شد، مربوط به سال ۲۰۱۹ می‌باشد. در این مقاله، مسئله مسیریابی دینامیکی وسایل حمل نقل، در حالت مشتری متحرک موردبررسی قرار گرفته است. نویسندگان این مقاله مسئله مسیریابی با مشتریان متحرک را در حالت دینامیکی[4] مدل کرده و آن را با استفاده از چهارچوب تکرارهای بهینه‌سازی مجدد[5]، حل کرده‌اند (Lombard, et al., 2018).

مقاله (Rastegar-Moghaddam et al., 2019) نیز به مسئله مسیریابی وسایل نقلیه با مشتری متحرک و در نظر گرفتن پنجره زمانی در حالت تحویل و برداشت پرداخته است که نسبت به کارهای قبلی تحویل و برداشت توأم را به مدل ریز و همکارانش اضافه کرده است. آن‌ها نیز در کار خود پنجره زمانی حضور مشتری در مکان‌های مختلف را مشخص کرده‌اند و حالت احتمالی در استقرار مشتری در مکان مشخص را در نظر نگرفته‌اند.

مقاله دیگر در این زمینه، توسط هی و همکاران در کنفرانس IEEE 2022 ارائه شده است. آن‌ها در این مقاله روش‌های هیوریستیک تهاجمی را برای حل مسائل مسیریابی پایه‌ای وسایل نقلیه با پنجره زمانی و همچنین همین مسئله، با در نظر گرفتن مکان متغیر برای مشتری را معرفی کرده‌اند (Lombard, et al., 2018). مقاله کنفرانسی دیگری نیز اخیراً توسط فام و همکاران، منتشر شده است که به ارائه یک الگوریتم ژنتیک ترکیبی برای حل مسائل مسیریابی با در نظر گرفتن مشتری متحرک پرداخته است (Pham, et al., 2022).

دومز و همکاران (Dumez, et al., 2021) مدل ارائه شده توسط رِیـز و همکاران (Reyes, et al., 2017) را با مدلی که مشتری گزینه مراجعه به مکان ثابت[6] را نیز دارد، ترکیب کرده‌اند. مدل ارائه شده توسط این نویسندگان تحت عنوان مسئله مسیریابی وسایل نقلیه با حق انتخاب مکان تحویل[7]، مطرح شده است. نویسندگان برای حل این مسئله از یک

[1] Branch-and-Price
[2] Vehicle Routing Problem with Roaming Delivery Problem and Stochastic Travel Time (VRPRDP-S)
[3] Greedy
[4] Dynamic Vehicle Routing Problem with Roaming Delivery Location (D-VRPRDL)
[5] Iterative Re-optimization Framework
[6] Delivery Options
[7] Vehicle Routing Problem with Delivery Option (VRPDO)

روش جستجوی همسایگی بزرگ استفاده کرده‌اند. موضوع حق انتخاب در مکان تحویل توسط محققان دیگری نیز موردتوجه قرار گرفته است که می‌توان به مقالات منتشرشده توسط تیلک و همکاران (Tilk, et al., 2021) و گِرابِنشوایگر و همکاران (Grabenschweiger, et al., 2021) اشاره کرد. هرچند این تحقیقات نیز در ادامه کار ریز و همکاران (Reyes, et al., 2017) مطرح‌شده‌اند، اما تنها نقطه اشتراک این دسته از مقالات با تحقیقات ما صرفاً متحرک فرض کردن مشتری در آن‌ها می‌باشد.

۳-۲- مسئله مسیریابی وسایل نقلیه با مشتری متحرک و تصادفی[1]

مسئله مسیریابی وسیله نقلیه با مشتری متحرک و درعین‌حال تصادفی، موضوع نسبتاً جدیدی است که کمتر موردتوجه محققان قرار گرفته است. در این زمینه منابع محدودی وجود دارد، که هرچند به موضوع مشتری متحرک توجه کرده‌اند، اما کمتر به مشتری با مکان تصادفی پرداخته‌اند. مقاله اوزبایجین و همکاران که قبلاً نیز به آن اشاره شد، به موضوع مشتری متحرک ولی غیرتصادفی می‌پردازد. از نظر آن‌ها نیز مدل VRPRDL ترکیبی از دو مسئله VRPTW[2] و GVRP[3] می‌باشد. البته آن‌ها اذعان می‌کنند که ترکیب این دو مسئله در سال ۲۰۱۲ توسط موچا و همکارانش (Moccia, et al., 2012) مطرح‌شده و با استفاده از یک الگوریتم جستجوی ممنوع حل شده است. اما مدل VRPRDL یک حالت ویژه از GVRPTW است که مکان‌های حضور مشتری، همان خوشه‌هایی هستند که در مدل GVRPTW در نظر گرفته می‌شود. آن‌ها درنهایت با ارائه روش خود و بررسی مثال‌های متعدد، نشان می‌دهند که روش ترکیبی آن‌ها، نزدیک به ۲۰٪ مقدار هزینه را بهبود می‌دهد (Ozbaygin & Savelsnergh, 2019). اما با بررسی بیشتر این مقاله مشخص خواهد شد که این مقاله در حوزه مشتری متحرک می‌تواند دسته‌بندی شود، که مشتری متحرک و تصادفی پرداخته نشده است.

بررسی پارامترهای احتمالی در مسائل مسیریابی توسط محققین مختلفی موردتوجه قرار گرفته است. به‌عنوان‌مثال بیرج و لاوو (Birge & Louveaux, 2011) در کتاب خود مثالی را مطرح کرده‌اند که در آن مقدار تقاضای یکی از مشتریان به‌صورت تصادفی در نظر گرفته شده است. مندوز و همکاران (Mendoza, et al., 2011) به معرفی روش هیورستیک برای حل مسئله مسیریابی با تقاضای تصادفی پرداخته‌اند. هواتوم و همکاران (Hvattum, et al., 2006) در مقاله خود به ارائه یک روش حل هیوریستیک برای حل مسائلی که ترکیبی از تقاضای احتمالی و مسیریابی دینامیک در آن‌ها وجود دارد، پرداخته‌اند. جن‌درا و همکاران (Gendreau, et al., 1996) در یک مقاله مروری، به معرفی انواع حالات فروشنده دوره‌گرد تصادفی و مسائل مسیریابی تصادفی می‌پردازند. آن‌ها به سه حالت تصادفی، شامل تقاضای احتمالی، مشتری احتمالی و زمان سفر احتمالی پرداخته‌اند. در تمام این منابع که به آن‌ها اشاره شد، عدم قطعیت به پارامترهایی غیر از محل استقرار مشتری توجه شده است.

اوزاریک و همکاران (Özarık, et al., 2021) به بررسی تحویل در مایل آخر پرداخته‌اند، با این فرض که ممکن است مشتری در محلی که مشخص کرده‌است حضور نداشته باشد. در این صورت باید در زمان دیگری سفارش به دست مشتری رسانده شود که این موضوع هزینه‌ای را در بر خواهد داشت. آن‌ها با لحاظ کردن این موضوع در مدل خود، توانسته‌اند ۱۷ تا ۴۰ درصد در هزینه‌ها صرفه‌جویی داشته باشند. کار آن‌ها بسیار شبیه به کار شفائی و همکاران (Shafaei, et al., 2021) می‌باشد. آن‌ها در مقاله خود مدل تصادفی را ارائه کرده‌اند که به‌احتمال عدم حضور مشتری در محل مشخص‌شده پرداخته است. در منابع قدیمی‌تر نیز جای‌لت (Jaillet, 1985) به بررسی فروشنده دوره‌گرد تصادفی می‌پردازد. گمبلا و همکارانش (Gambella, et al., 2018) نیز، حالتی از مسئله عمومی VRP را موردبررسی قرار داده‌اند که مکان تحویل گرفتن از مشتریان، ثابت نیست[4]. آن‌ها مشتری متحرک را تحت عنوان اهداف شناور[5] نام‌گذاری کرده‌اند. در مسئله تعریف‌شده توسط آن‌ها، اهداف یا همان مشتریان، مجاز هستند ضمن اینکه منتظر یک وسیله نقلیه باشند، از مکان اولیه خود حرکت کرده و به مکان دیگری که در مسیر حرکت وسیله نقلیه قرار دارد نیز بروند. این مدل تفاوت

[1] Vehicle Routing Problems with Mobile and Stochastic Customer location (VRP-MSCL)
[2] Vehicle routing problem with Time Window
[3] General Vehicle Routing Problem
[4] Vehicle Routing Problem with Floating Target (VRPTF)
[5] Floating Targets

اساسی با کاری که ما انجام داده‌ایم دارد. در این مدل، هرچند مشتری متحرک می‌باشد، ولی وسیله نقلیه به دنبال مشتری در مکان‌های دیگری نمی‌رود، بلکه به مشتریان اطلاع داده می‌شود که وسیله نقلیه کجا قرار دارد و آن‌ها در چه زمانی حرکت کنند تا به تور حرکت وسیله نقلیه خود را برسانند. این مدل‌ها بیشتر برای ارائه سرویس جابجایی دانش‌آموزان به مدارس، یا کارگران و کارکنان به کارخانه‌ها یا ادارات کاربرد دارد. همچنین در مدل آن‌ها نیز موضوع عدم قطعیت در مکان مشتریان موردتوجه قرار نگرفته است. در نظر گرفتن زمان سفر به‌صورت تصادفی در مدل‌های VRPRDL توسط لامبارد و همکارانش (Lombard, et al., 2018) ارائه شده است. در این مدل، ماتریس قطعی فاصله در مدل‌های VRP با یک ماتریس فاصله‌ای که فواصل در آن به‌صورت احتمالی در نظر گرفته‌شده، جایگزین می‌شود. آن‌ها مدل طراحی‌شده خود را با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو حل کرده‌اند. آن‌ها نیز فرض را بر این قرار داده‌اند که امکان تحویل سفارشات مشتریان در صندوق‌عقب خودروهایشان وجود دارد. هرچند این کار در زمره مسائلی که به عدم قطعیت می‌پردازند، قرار می‌گیرد، اما تفاوت اساسی کار لامبارد و همکارانش با کاری که ما در این مقاله ارائه کرده‌ایم به تصادفی بودن مکان مشتریان بازمی‌گردد. در کار ما، مشتریان در یک نقطه مشخص ثابت نبوده و حضور آن‌ها در یک محدوده مکانی مشخص، کاملاً احتمالی بوده و از یک تابع توزیع پیروی می‌کند (احتمال حضور هر مشتری در هر ناحیه مکانی، بر اساس داده‌های زمانی جمع‌آوری‌شده، تعیین می‌شود). هرچند آن‌ها نیز مشتری را متحرک در نظر گرفته‌اند، اما پنجره زمانی حضور هر مشتری در هر مکان در کار آن‌ها مشخص و قطعی می‌باشد. عدم قطعیت را هی و همکاران (He, et al., 2020) نیز بر روی مدل VRPRDL اعمال کرده و یک روش متاهیورستیک برای حل آن در حالتی که زمان‌های سفر احتمالی هستند، ارائه کرده‌اند. آن‌ها برای حل مسئله موردنظر، از مدل برنامه‌ریزی تصادفی استفاده کرده و مدل طراحی‌شده را با استفاده از ادغام دو روش متاهیوریستک حل کرده و روش پیشنهادی را با حل ۴۰ مثال موردبررسی قرار داده‌اند. آن‌ها مسئله خود را تحویل در مرحله آخر با در نظر گرفتن مکان تحویل متغیر نامیده‌اند[1] و از نظر نوع مسئله نیز مشابه مسئله مطرح‌شده توسط لامبارد و همکارانش (Lombard, et al., 2018) می‌باشد. در این مقاله نیز به متغیر و تصادفی بودن مکان مشتریان پرداخته نشده است. آنچه در بررسی ادبیات مسجل شده ، این است که کار زیادی بر روی موضوع مشتری متحرک صورت نگرفته است و با توجه به جدید بودن موضوع، امکان توسعه آن وجود دارد. همچنین مقاله‌ای که در آن علاوه بر متحرک بودن مشتری، حضور آن در مکانی به‌صورت تصادفی در نظر گرفته شود، یا اینکه حضور یک مشتری در یک مکان از تابع توزیع احتمالی پیروی کند، کمتر موردتوجه محققان قرار گرفته است.

۳-۳- نوآوری‌های علمی در این مقاله

با توجه به شرایط واقعی، در این پژوهش تلاش شده است تا کمترین محدودیت برای مشتری در نظر گرفته شود و او آزاد باشد تا در هر زمان و مکانی که تمایل دارد حضور یابد. مدلی ارائه شده است که قادر به در نظر گرفتن این شرایط و کاهش هرچه بیشتر هزینه باشد. به‌طور مشخص، نوآوری‌های اصلی این مقاله در موارد زیر خلاصه می‌شود:

۱) ارائه یک مدل عمومی برای مسائل مسیریابی: این مدل امکان استخراج مدل‌های کلاسیک را با در نظر گرفتن فرضیات خاص فراهم می‌آورد.
۲) در نظر گرفتن شرایط واقعی‌تر مکان مشتریان: برخلاف فرض رایج، معمولاً مشتری پس از ثبت سفارش، در یک مکان مشخص منتظر نمی‌ماند.
۳) در نظر گرفتن مکان تصادفی برای مشتریان: این رویکرد، شرایط مسئله را به واقعیت نزدیک‌تر می‌کند.

در خصوص نحوه برآورد تابع توزیع احتمال مکانی، باید توجه داشت که این تابع بر اساس دو رویکرد اصلی قابل‌تعیین است:

- **رویکرد اول:** استفاده از داده‌های تاریخی: این رویکرد شامل بهره‌گیری از داده‌های تاریخی موقعیت مشتریان (مانند لاگ‌های GPS یا داده‌های تلفن همراه) و برآورد تجربی چگالی احتمال با روش‌های ناپارامتری مانند تخمین چگالی هسته است. در این روش، احتمال

[1] Last Mile Delivery with Roaming Delivery Location (LMDRDL)

حضور در هر نقطه، متناسب با تراکم مشاهدات گذشته در همان نقطه یا همسایگی آن در زمان‌های مشابه تعیین می‌شود.

- **رویکرد دوم:** استفاده از توزیع‌های پارامتریک: این رویکرد در شرایط فقدان داده به کار می‌رود و از توزیع‌های پارامتریک ساده‌سازانه استفاده می‌کند. برای نمونه، توزیع یکنواخت (در صورت عدم اطلاع از تمایل مشتری به نقطه خاص) یا توزیع نرمال دومتغیره (در صورت وجود مرکز ثقل شناخته‌شده برای ناحیه) قابل‌استفاده است. در این مقاله، برای مثال عددی بخش ۵، از توزیع نرمال دومتغیره با میانگین مرکز ثقل ناحیه استفاده شده است.

در تمامی حالات، تابع احتمال باید روی کل ناحیه نرمالیزه شده و انتگرال آن برابر یک باشد. این رویکردها تضمین می‌کنند که مدل قابلیت پیاده‌سازی در مسائل واقعی با داده‌های در دسترس را دارد.

مرور ادبیات انجام‌شده نشان می‌دهد که اگرچه پژوهش‌هایی در حوزه مشتری متحرک صورت گرفته است، اما کمتر مطالعه‌ای به‌طور هم‌زمان به «متغیر بودن مکان مشتری» و «تصادفی بودن حضور وی در نقاط مختلف ناحیه» پرداخته است. ازاین‌رو، در ادامه، مدل ریاضی جدیدی تحت عنوان VRP-MSCL ارائه می‌شود که در آن محل دقیق ملاقات با هر مشتری به‌عنوان یک متغیر تصمیم در نظر گرفته شده و احتمال حضور مشتری در نقاط مختلف ناحیه از یک تابع توزیع مشخص پیروی می‌کند. در جدول **۲**، مدل پیشنهادی این مقاله با رویکردهای مشابه (مانند VRPTW، VRP استوار، و VRP با نقاط ملاقات متغیر) مقایسه شده و تمایز اصلی آن با مدل‌های اشاره‌شده، بیان گردیده است.

۴- معرفی مدل VRP-MSCL

برای مدل کردن مسئله، باید مجموعه‌ها، پارامترها، متغیرها و البته توابع مرتبط با معادلات مدل تعریف شوند که در ذیل ملاحظه می‌شوند.

- **تعریف مجموعه‌ها**

N	مجموعه مشتریان و انبار: اندیس‌های i,j,p معرف مشتریان و انبار هستند. اندیس $i=1$ به‌طور خاص به انبار اختصاص دارد.
M	محدودیت‌های ناحیه تردد مشتری: حداکثر تعداد محدودیت‌هایی که ناحیه تردد هر مشتری را مشخص می‌کنند، با اندیس m نمایش داده می‌شود.
V	مجموعه وسایل نقلیه توزیع‌کننده: اندیس v معرف وسایل نقلیه توزیع‌کننده بسته‌های قطعات است.

- **تعیین پارامترها و مقادیر ثابت**

de_i	میزان سفارش (تقاضای) هر مشتری i
C_T	هزینه واحد جابجایی وسیله نقلیه
C_c	هزینه واحد جابجایی مشتری
C_v	ظرفیت هرکدام از وسایل نقلیه توزیع‌کننده

- **معرفی متغیرها**

$A_i(x_i, y_i)$	نقطه ملاقات مشتری i با وسیله نقلیه
x_i	عرض از مبدأ محل ملاقات مشتری i با وسیله نقلیه
y_i	طول از مبدأ محل ملاقات مشتری i با وسیله نقلیه
$A'_i(x'_i, y'_i)$	موقعیت مشتری i در نقطه ملاقات (نقطه‌ای که مشتری i در آنجا قرار دارد، هنگامی‌که وسیله نقلیه به محل ملاقات می‌رسد)
x'_i	عرض از مبدأ مشتری i در ناحیه حرکتی (عرض از مبدأ مشتری i هنگامی‌که وسیله نقلیه وارد ناحیه حرکتی مشتری i می‌شود)
y'_i	طول از مبدأ مشتری i در ناحیه حرکتی (طول از مبدأ مشتری i هنگامی‌که وسیله نقلیه وارد ناحیه حرکتی مشتری i می‌شود)
$w_{i,j}^v$	برابر ۱، اگر وسیله نقلیه v مسیر بین مشتری i و مشتری j را طی کند؛ در غیر این صورت برابر ۰
$d_{i,j}$	مسافت جابجایی بین مشتری i و مشتری j

u_i^v متغیر تعریف‌شده برای جلوگیری از تشکیل زیر تور به روش MTZ[1]

- **معرفی توابع**

$P_i(x_i, y_i)$ احتمال حضور مشتری i در نقطه (x_i, y_i) هنگام مراجعه وسیله نقلیه به ناحیه تردد مشتری i

$F_{i,m(i)}$ تابع m ام مشخص‌کننده مرزهای ناحیه تردد مشتری i

Fd تابع تعیین فاصله

f_{pi} تابع توزیع احتمال در ناحیه مربوط به مشتری i

ملاحظه می‌شود که دو سری متغیر تصمیم مستقل در اینجا تعریف‌شده‌اند که تصمیمات اصلی مسئله را اتخاذ می‌کنند. نخست، متغیرهایی که محل ملاقات مشتری با وسیله نقلیه را تعیین می‌کنند؛ و دیگری، متغیرهایی که ترتیب ملاقات مشتریان توسط وسیله نقلیه را مشخص خواهند کرد.

۴-۱- تابع هدف مدل

چون حضور مشتری در مکان مشخص‌شده قطعی نبوده و در آن عدم‌قطعیت وجود دارد، در این مدل تابع هدف از دو بخش تشکیل می‌شود. بخش نخست، هزینه مربوط به زمانی است که در مراجعه وسیله نقلیه به محل مشخص‌شده، مشتری نیز در آن محل حضور دارد؛ و بخش دوم، هزینه مربوط به زمانی است که مشتری در محل مشخص‌شده حضور ندارد، لذا از نظر مدل، باید جریمه‌ای بابت این قضیه پرداخت شود. پس تابع هدف مدل به‌صورت رابطه (۵) خواهد بود:

$$\min Z = \text{هزینه تشکیل تور برای رساندن سفارشات مشتریان} + \text{هزینه جریمه مربوط به اینکه در هنگام مراجعه وسیله نقلیه، مشتری در محل مشخص‌شده حضور نداشته باشد} \quad (۵)$$

با توجه به علائم و پارامترهای تعریف‌شده، این دو بخش از تابع هدف، اگر فرض بر این باشد که مشتری در هر ناحیه خود را به وسیله نقلیه می‌رساند (سیاست اول در فرض ۷)، به‌صورت رابطه (۶) خواهد بود:

$$\text{P1: } \min Z = \sum_i \sum_j \sum_v C_T d_{i,j} w_{i,j}^v + \sum_i C_j E[Fd(A_i, A_i')] \quad (۶)$$

که رابطه محاسبه امید ریاضی فاصله بین مکان فعلی مشتری (A_i') با مکان مشخص‌شده برای ملاقات هنگام مراجعه وسیله نقلیه (A_i) از رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$E[Fd(A_i, A_i')] = \int_{\underline{x_i'}}^{\overline{x_i'}} \int_{\underline{y_i'}}^{\overline{y_i'}} \left(P_i(x_i', y_i') Fd(x_i, x_i', y_i, y_i')\right) dx_i' dy_i' \quad (۷)$$

با توجه به اینکه برای تعیین فاصله بین دو مشتری باید متغیرهای عرض و طول از مبدأ تعیین شوند و همچنین با توجه به اینکه مسافت در متغیر تعیین ترتیب حرکت بین مشتریان ضرب می‌شود، لذا به‌طور واضح هر دو بخش تابع هدف در این مدل غیرخطی خواهد شد.

۴-۲- محدودیت‌های مدل

در این مدل، با سه دسته محدودیت مواجه هستیم: دسته‌ی نخست، محدودیت‌های مرتبط با تعیین فاصله بین مشتریان است که به دلیل تساوی بودن، می‌توانند مستقیماً در تابع هدف نیز وارد شوند. دسته‌ی دوم، شامل محدودیت‌های مرتبط با تعیین محدوده حرکتی مشتریان در هر ناحیه است؛ بسته به شکل ناحیه حرکتی هر مشتری، می‌توان یک یا چند محدودیت برای هر ناحیه تعریف کرد. دسته‌ی سوم نیز شامل محدودیت‌های مربوط به تشکیل تور و تعیین مسیر حرکت وسایل نقلیه است.

جدول ۲. تمایز مدل پیشنهادی (VRP-MSCL) با رویکردهای مشابه

Table 2. Distinction between the proposed model (VRP-MSCL) and existing approaches.

رویکرد	عدم قطعیت	جایگاه مکان ملاقات	نقش احتمالات	تفاوت کلیدی با مدل پیشنهادی
VRPTW	ندارد (قطعی)	از پیش مشخص (ثابت)	ندارد	مکان مشتری ثابت است
VRP استوار	دارد (بدترین حالت)	از پیش مشخص (ثابت)	ندارد	بدون توزیع احتمال
VRPRDL	ندارد (قطعی)	متغیر اما گسسته	ندارد	مکان مشتری متغیر ولی قطعی است
مدل پیشنهادی (VRPMSCL)	دارد (تصادفی)	متغیر و پیوسته	دارد	مکان ملاقات متغیر و قطعی است.

[1] Miller-Tucker-Zelmin

مجموعه معادلات (۸)، تابع محاسبه مسافت بین مشتریان را نشان می‌دهد. معادلات (۹)، تابع چگالی احتمال حضور هر مشتری را در هر ناحیه مشخص می‌کند. مجموعه نامساوی‌های (۱۰) نیز ناحیه تردد هر مشتری را تعیین خواهد کرد. محدودیت‌های (۱۱) تا (۱۷)، محدودیت‌های معمول در مسائل مسیریابی هستند که در این مسئله نیز به دلیل ضرورت تعیین تور هر یک از وسایل نقلیه، برقرار خواهند بود. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، محدودیت‌های (۸)، (۹) و (۱۰) بسته به شکل محدوده‌ها، می‌توانند خطی یا غیرخطی باشند.

- **تابع محاسبه فاصله**

$$d_{i,j} = Fd(x_i, x_j, y_i, y_j); \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} \quad (۸)$$

- **تابع توزیع احتمال حضور مشتری در ناحیه**

$$P_i(x_i', y_i') = f_{pi}(x_i', y_i') \mid (x_i', y_i') \in \{F_{i,m}(x_i, y_i)\}; \forall i \in \{1,2,\dots,n\} \quad (۹)$$

- **مجموعه محدودیت‌های تعیین ناحیه تردد هر مشتری**

$$F_{i,m}(x_i, y_i) \le b_{i,m}; \forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall m \in \{1,\dots,m(i)\} \quad (۱۰)$$

- **سرویس‌دهی به هر مشتری فقط توسط یک وسیله نقلیه**

$$\sum_{i \neq j} \sum_{v} w_{i,j}^{v} = 1 \,; \forall i,j \in \{2,3,\dots,n\} \quad (۱۱)$$

$$\sum_{j \neq i} \sum_{v} w_{i,j}^{v} = 1 \,; \forall i,j \in \{2,3,\dots,n\} \quad (۱۲)$$

- **تداوم مسیر (ورود و خروج وسیله نقلیه از یک ناحیه)**

$$\sum_{i} w_{i,p}^{v} - \sum_{j} w_{p,j}^{v} = 0; \forall p \in \{1,\dots,n\}, \forall v \in \{1,\dots,V\} \quad (۱۳)$$

- **محدودیت ظرفیت وسیله نقلیه**

$$\sum_{i} \sum_{j} de_i \, w_{i,j}^{v} \le C_{\mathrm{v}}; \forall v \in \{1,\dots,V\} \quad (۱۴)$$

- **خروج هر وسیله نقلیه از انبار تنها یک بار**

$$\sum_{j \ge 2} w_{1,j}^{v} \le 1; \forall v \in \{1,\dots,V\} \quad (۱۵)$$

- **بازگشت هر وسیله نقلیه به انبار تنها یک بار**

$$\sum_{i \ge 2} w_{i,1}^{v} \le 1; \forall v \in \{1,\dots,V\} \quad (۱۶)$$

- **حذف زیرتور (به روش MTZ)**

$$u_i^v + u_j^v + n \cdot w_{i,j}^v \le (n-1); \forall i,j \in \{2,\dots,n\}, \forall v \in \{1,\dots,V\}, i \neq j \quad (۱۷)$$

حدود متغیرها:

$u_i^v \in \mathbb{R}^+, d_{i,j} \ge 0, w_{i,j}^v \in \{0,1\}, x_i \ge 0, y_i \ge 0$

و با توجه به اینکه تابع هدف غیرخطی است، مدل معرفی‌شده یک مدل غیرخطی مختلط[1] خواهد بود.

۴-۳- معیارهای تکمیلی عملکرد و قابلیت توسعه مدل

مدل پایه این مقاله بر کمینه‌سازی هزینه کل (شامل هزینه حرکت بالگرد و هزینه جابجایی اکیپ‌های امدادی) تمرکز دارد. بااین‌حال، در بسیاری از کاربردهای عملی، معیارهای دیگری نیز برای ارزیابی کیفیت سرویس اهمیت دارند. در ادامه، چهار معیار پیشنهادی بررسی و نحوه افزودن هر یک به مدل به‌صورت مفهومی تشریح می‌شود.

۱) نرخ موفقیت ملاقات[2]

این معیار نشان می‌دهد که با چه احتمالی اکیپ امدادی دقیقاً در همان نقطه‌ای که بالگرد فرود می‌آید، حضور دارد. در مدل فعلی، این احتمال همان تابع توزیع احتمال در هر نقطه است. برای اطمینان از اینکه نقطه ملاقات در منطقه‌ای با احتمال حضور «کافی» انتخاب شود، می‌توان یک محدودیت ساده اضافه کرد: «احتمال حضور مشتری در نقطه ملاقات نباید کمتر از مقدار مشخصی مثلاً ۸۰٪ باشد». این کار تضمین می‌کند که بالگرد در نقطه‌ای فرود نیاید که شانس حضور امدادگر در آن بسیار کم است.

۲) تأخیر مورد انتظار[3]

اگر اکیپ امدادی در نقطه ملاقات حاضر نباشد، باید خود را به آن نقطه برساند. این جابجایی زمان‌بر است. در مدل فعلی، هزینه این جابجایی را در نظر گرفته‌ایم. اگر زمان

[1] Mixed Integer Nonlinear Programming
[2] Meeting Success Rate
[3] Expected Delay

تحویل حیاتی باشد (مثلاً دارو یا تجهیزات اورژانسی)، می‌توان به‌جای هزینه، زمان مورد انتظار را محاسبه کرد و محدودیتی مانند «میانگین زمان جابجایی امدادگران نباید از ۱۰ دقیقه بیشتر شود» به مدل اضافه نمود.

۳) جریمه عدم تحویل[1]

در شرایط واقعی ممکن است اکیپ امدادی اصلاً نتواند خود را به نقطه ملاقات برساند (مثلاً به دلیل دوری مسیر یا موانع جغرافیایی). در این حالت، سفارش تحویل داده نمی‌شود. برای مدل‌سازی این وضعیت، می‌توان جریمه سنگینی برای عدم تحویل در نظر گرفت تا مدل ترجیح دهد نقاط ملاقات را در مناطقی انتخاب کند که دسترسی برای امدادگر آسان است. در حالت حدی، اگر جریمه را بسیار بزرگ در نظر بگیریم، مدل مجبور می‌شود نقاطی را انتخاب کند که حتماً تحویل در آن‌ها امکان‌پذیر باشد.

۴) سطح خدمت[2]

سطح خدمت یک معیار ترکیبی است که می‌تواند هم‌زمان هزینه، زمان تأخیر، و احتمال موفقیت را در بربگیرد. به‌عنوان‌مثال، می‌توان یک شاخص ترکیبی تعریف کرد که ٪۵۰ به هزینه، ٪۳۰ به زمان تأخیر و ٪۲۰ به نرخ موفقیت وزن بدهد. سپس مدل به‌جای کمینه‌سازی صرف هزینه، این شاخص ترکیبی را بیشینه کرده و به تصمیم‌گیرنده اجازه می‌دهد بین معیارهای مختلف تعادل برقرار کند.

۴-۳-۱- قابلیت توسعه مدل برای لحاظ قیود عملیاتی

مدل پایه این مقاله برای سادگی، تنها محدودیت ظرفیت وسایل نقلیه و منع تشکیل زیرتور را شامل می‌شود. اما معماری مدل به‌گونه‌ای است که قیود عملیاتی دیگر به‌راحتی قابل افزودن هستند. پنجره زمانی را می‌توان با تعریف متغیر زمان سرویس‌دهی و محدودیت‌های بازه زمانی به مدل اضافه کرد. محدودیت سوخت با تعریف متغیر سطح سوخت و کسر مصرف به ازای هر حرکت قابل مدل‌سازی است. اولویت مشتریان نیز یا با اعمال وزن در تابع هدف و یا با محدودیت ترتیب سرویس‌دهی قابل‌اعمال می‌باشد. همچنین محدودیت‌هایی مانند حداکثر تعداد مشتری در هر مسیر، حداکثر زمان مجاز هر تور، و سازگاری نوع کالا با وسیله نقلیه نیز به‌سادگی با افزودن محدودیت‌های خطی جدید به مدل قابل پیاده‌سازی هستند. این گسترش‌ها به‌عنوان مسیرهای پژوهشی آینده در بخش جمع‌بندی مقاله پیشنهادشده‌اند.

۴-۳-۲- تعمیم مدل به حالت حضور احتمالی مشتری

مدل پایه این مقاله برفرض حضور قطعی مشتری در ناحیه در زمان تحویل استوار است (فرض ۶). این فرض برای ساده‌سازی مدل اولیه انتخاب شده است. اما در کاربردهای واقعی، همواره این احتمال وجود دارد که مشتری در ناحیه حضور نداشته باشد. برای تعمیم مدل به این حالت، می‌توان برای هر مشتری یک احتمال عدم حضور در نظر گرفت. در این صورت، دو راهکار پیشنهاد می‌شود: راهکار اول، افزودن جمله جریمه به تابع هدف است به‌طوری‌که در صورت عدم حضور مشتری، هزینه ثابتی (مانند هزینه از دست رفتن فرصت یا ارسال مجدد) به کل هزینه‌ها اضافه شود. راهکار دوم، موکول کردن سفارش مشتری غایب به زمان یا روز بعد است که نیازمند یک مدل پویا و چند دوره‌ای می‌باشد. با توجه به افزایش چشمگیر پیچیدگی محاسباتی در این تعمیم، توسعه کامل آن در مقاله حاضر گنجانده نشده و به‌عنوان یک مسیر پژوهشی ارزشمند برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌گردد.

۴-۳-۳- ملاحظات پیاده‌سازی در سیستم واقعی

- **نحوه اجرا در سیستم واقعی**

مدل پیشنهادی به‌عنوان یک سامانه تصمیم‌یار برای برنامه‌ریزی مسیر وسایل نقلیه طراحی شده است. در ابتدای هر دوره برنامه‌ریزی (مثلاً ابتدای روز)، مدل با استفاده از داده‌های موجود شامل موقعیت تخمینی مشتریان، نواحی حرکت آن‌ها، توزیع‌های احتمال مکانی، و تقاضاهای ثبت‌شده، یک برنامه مسیریابی اولیه شامل توالی حرکت و نقاط ملاقات بهینه را تولید می‌کند. این برنامه به رانندگان یا اپراتورها ابلاغ می‌شود.

- **فرکانس به‌روزرسانی اطلاعات مکانی**

فرضیه‌ی مدل بر این استوار است که موقعیت لحظه‌ای مشتریان، از طریق ابزارهایی مانند GPS تلفن همراه یا خودرو، قابل‌ردیابی می‌باشد. سطح دقت موردنیاز و امکانات

[1] Penalty for Failed Delivery

[2] Service Level

فنی موجود، تعیین‌کننده‌ی فرکانس به‌روزرسانی این اطلاعات خواهد بود. در کاربردهای معمول، نظیر تحویل بسته‌ها، به‌روزرسانی اطلاعات مکانی هر ۵ تا ۱۵ دقیقه یک‌بار کافی است. اما در سناریوهای حساس‌تر، مانند عملیات امداد و نجات، به‌روزرسانی لحظه‌ای (با فواصل زمانی چندثانیه‌ای) قویاً توصیه می‌شود. در چارچوب مدل حاضر، فرض بر این است که موقعیت واقعی مشتری (x_i', y_i') در لحظه ورود وسیله نقلیه به ناحیه مربوطه، قابل‌تشخیص و تعیین می‌باشد.

- **تصمیم‌گیری برخط یا آفلاین**

مدل در شکل فعلی خود یک مدل آفلاین (از پیش برنامه‌ریزی‌شده) است؛ یعنی مسیر و نقاط ملاقات قبل از شروع حرکت وسیله نقلیه مشخص می‌شوند. بااین‌حال، معماری مدل به‌گونه‌ای است که قابلیت تعمیم به حالت برخط (آنلاین) را دارد. در حالت برخط، به‌محض دریافت اطلاعات جدید (مثل تغییر مکان مشتری یا تقاضای جدید)، مدل مجدداً اجراشده و مسیر به‌روزرسانی می‌شود. اما باید توجه داشت که حل مدل غیرخطی در زمان واقعی (چند ثانیه) برای ابعاد بزرگ چالش‌برانگیز است. بنابراین در کاربردهای عملی، ترکیبی از برنامه‌ریزی اولیه آفلاین و اصلاحات جزئی برخط پیشنهاد می‌شود.

- **روش بازبرنامه‌ریزی**

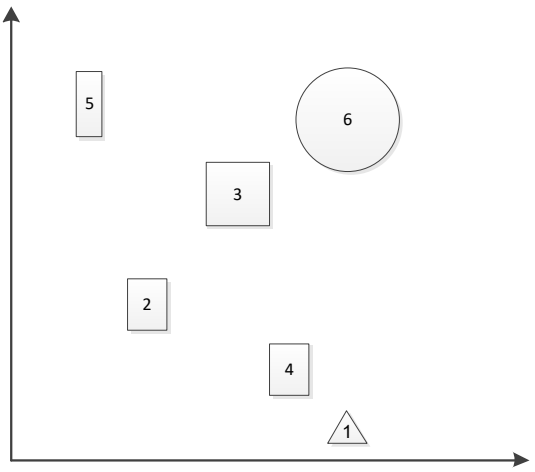
در صورت انحراف از برنامه اولیه، مانند نبودِ مشتری در نقطه ملاقات یا وقوع ترافیک غیرمنتظره، دو رویکرد برای بازبرنامه‌ریزی وجود دارد:

- **رویکرد واکنشی**[1]: در این رویکرد، هنگام وقوع رویداد غیرمنتظره، فقط بخش متأثر از مسیر، مانند مشتری جاری و دو مشتری بعدی، مجدداً بهینه‌سازی می‌شود. این روش سریع است، اما ممکن است به جواب بهینه سراسری نرسد.
- **رویکرد پیش‌گیرانه**[2]: در این رویکرد، مدل از ابتدا چندین سناریو را پیش‌بینی کرده و مسیری طراحی می‌کند که در مواجهه با بیشتر سناریوها عملکرد قابل قبولی داشته باشد. این روش به زمان محاسباتی بیشتری نیاز دارد، اما از پایداری بیشتری برخوردار است.

در مدل پایه این مقاله، از رویکرد واکنشی ساده استفاده شده است. توسعه رویکردهای پیش‌گیرانه و ترکیبی نیز به‌عنوان یکی از مسیرهای پژوهشی آینده پیشنهاد می‌شود. نکته نهایی این است که برای پیاده‌سازی عملی، به زیرساخت‌های فنی شامل سامانه ردیاب GPS، ارتباط بی‌سیم میان وسیله نقلیه و مرکز کنترل، و نرم‌افزار بهینه‌سازی با قابلیت اجرای مکرر مدل نیاز است. این الزامات امروزه در بسیاری از شرکت‌های بزرگ لجستیکی وجود دارد.

۵- مثال عددی و تحلیل

شکل **۲** را در نظر بگیرید؛ فرض کنید یک بالگرد امداد می‌بایست ۵ ناحیه را که در شکل مشخص‌شده‌اند، تحت پوشش قرار دهد.



شکل ۲. موقعیت مرکز توزیع و مناطق تحت پوشش توسط بالگرد.

Figure 2. Location of the distribution center and helicopter coverage areas.

در این سناریو، مکان ۱ محل استقرار بالگرد (انبار) و مکان‌های ۲ تا ۶، نواحی آسیب‌دیده‌ای هستند که باید توسط اکیپ‌های امداد مورد پشتیبانی قرار گیرند. فرض بر این است که در حال حاضر ۵ اکیپ امداد در نواحی مربوطه مستقر بوده و در حال انجام عملیات هستند. نکته کلیدی این است که موقعیت دقیق اکیپ‌های امدادی مدام در حال تغییر بوده و امکان تعیین مکان دقیق آن‌ها در لحظه ارسال اقلام پشتیبانی وجود ندارد. بااین‌حال، فرض می‌شود احتمال حضور امدادگران در نقاط مختلفِ هر ناحیه از یک

[1] Reactive

[2] Proactive

تابع توزیع نرمال پیروی می‌کند که میانگین آن برابر با مرکز ثقل هر ناحیه و واریانس آن برابر با ۱ است. بر این اساس، احتمال حضور آن‌ها در مرکز نواحی به دلیل تراکم جمعیت بیشتر خواهد بود و با نزدیک شدن به مرزهای هر ناحیه، این احتمال کاهش می‌یابد.

در جدول **۳**، مختصات جغرافیایی مناطق با مشخص کردن حد پایین و بالای هر منطقه ارائه شده است.

جدول ۳. محدوده جغرافیایی مناطق

Table 3. Geographical boundaries of the service areas.

ناحیه	مختصات جغرافیایی			
	محور x		محور y	
	کمترین	بیشترین	کمترین	بیشترین
۱	۲۵	۲۵	۲	۲
۲	۹	۱۲	۱۰	۱۴
۳	۱۵	۲۰	۱۸	۲۴
۴	۲۰	۲۳	۵	۹
۵	۵	۷	۲۵	۳۰
۶	۲۲	۳۰	۲۲	۳۰

نتایج عددی ارائه‌شده در این مقاله بر اساس داده‌های مصنوعی[1] تولیدشده‌اند. روش تولید هر یک از دسته‌های داده به شرح زیر است:

- **مختصات نواحی (جدول ۳):** شش ناحیه (شامل یک انبار و پنج منطقه آسیب‌دیده) به‌صورت دستی و با الهام از یک منطقه شهری فرضی طراحی‌شده‌اند. هر ناحیه به‌صورت یک مستطیل با حدود مشخص در محورهای X و Y تعریف شده است. انبار در مختصات $(25, 2)$ قرار دارد و پنج ناحیه دیگر در اطراف آن پراکنده‌شده‌اند تا تنوع مکانی مناسبی ایجاد شود. محدوده هر ناحیه به‌گونه‌ای انتخاب شده است که نواحی با یکدیگر هم‌پوشانی نداشته باشند.
- **میزان تقاضا** (de_i): تقاضای هر ناحیه (به استثنای انبار) بر اساس شدت فرضی آسیب در آن منطقه به‌صورت تصادفی تعیین شده است. مقادیر انتخاب‌شده عبارت‌اند از: ناحیه ۲: ۱۰۰ واحد، ناحیه ۳: ۲۰۰ واحد، ناحیه ۴: ۱۵۰ واحد، ناحیه ۵: ۵۰ واحد و ناحیه ۶: ۱۷۰ واحد. مجموع این مقادیر از ظرفیت هر بالگرد (۴۰۰ واحد) فراتر رفته است تا ضرورت استفاده از دو وسیله نقلیه و تصمیم‌گیری مدل توجیه شود.
- **پارامترهای توزیع احتمال** (P_i): فرض شده است که احتمال حضور اکیپ‌های امدادی در نقاط مختلف هر ناحیه از یک توزیع نرمال دومتغیره پیروی می‌کند. میانگین این توزیع، مرکز ثقل (نقطه میانی) هر ناحیه در نظر گرفته شده است. واریانس در هر دو جهت برابر با ۱ و کوواریانس بین محورها صفر فرض شده است. این انتخاب نشان‌دهنده آن است که احتمال حضور در نزدیکی مرکز ناحیه بیش از حاشیه‌هاست که با منطق تمرکز جمعیت در مراکز مناطق شهری همخوانی دارد.
- **هزینه‌های واحد** (C_T **و** C_c): هزینه واحد جابجایی بالگرد (C_T) برابر با ۵۰ واحد پولی و هزینه واحد جابجایی اکیپ‌های امدادی (C_c) در حالت پایه برابر با ۵۵ واحد در نظر گرفته شده است. همچنین در بخش تحلیل حساسیت، اثر افزایش C_c تا ۲۴۰۰ واحد بررسی شده است. این مقادیر صرفاً جهت نمایش قابلیت‌های مدل انتخاب‌شده‌اند و در کاربردهای واقعی باید بر اساس داده‌های اقتصادی مسئله تعیین گردند.
- **توابع فاصله** (Fd): برای حرکت بالگرد (بخش اول تابع هدف) از فاصله اقلیدسی (مستقیم) استفاده شده است، زیرا بالگرد قادر به حرکت در خط مستقیم می‌باشد. در مقابل، برای جابجایی اکیپ‌های امدادی درون نواحی (بخش دوم تابع هدف) از فاصله منهتنی استفاده شده است، زیرا حرکت امدادگران در سطح شهر معمولاً تابع شبکه خیابان‌های عمود بر هم است.
- **ظرفیت بالگرد** (C_v): ظرفیت هر بالگرد ۴۰۰ واحد در نظر گرفته شده است؛ این مقدار از تقاضای هر ناحیه به‌صورت مجزا بیشتر، اما از مجموع تقاضای تمامی نواحی کمتر است. این

[1] Synthetic Data

انتخاب باعث می‌شود مدل برای مدیریت ظرفیت، ملزم به تصمیم‌گیری در مورد توالی و ترکیب نواحی در هر مسیر شود.

در ابتدا، مسئله MINLP با استفاده از مدل P1 فرموله شده است. با توجه به شرایط مسئله، محدودیت شماره **۵** بر اساس تابع توزیع نرمال (با میانگین برابر با مرکز ثقل ناحیه و واریانس ۱) بازنویسی شده و تابع شماره **۲** در تابع هدف نیز با توجه به این توزیع تغییر یافته است.

مدل تغییریافته با استفاده از نرم‌افزار GAMS و حل‌گر DICOPT حل شده است که نتایج آن در جدول **۴** به‌عنوان یک جواب قابل‌قبول ارائه شده است. همان‌گونه که پیش‌تر اشاره شد، این نتایج با در نظر گرفتن پارامترهای مؤثر بر هزینه محاسبه‌شده‌اند؛ به‌طوری‌که میزان تقاضای نواحی ۲ تا ۶ (de_i) به ترتیب برابر با ۱۰۰، ۲۰۰، ۱۵۰، ۵۰ و ۱۷۰ واحد در نظر گرفته شده است. همچنین، هزینه واحد جابجایی بالگرد (C_T) برابر با ۵۰ و هزینه جابجایی اکیپ‌های امداد (C_c) برابر با ۵۵ واحد لحاظ شده است که منجر به حصول هزینه کل جابجایی (مقدار تابع هدف) برابر با ۵۹۹۸ واحد پولی می‌گردد. شایان‌ذکر است که گزارش نرم‌افزار GAMSتأکید دارد جواب به‌دست‌آمده لزوماً بهینه نیست و ممکن است مقدار بهینه واقعی کمتر از این میزان باشد.

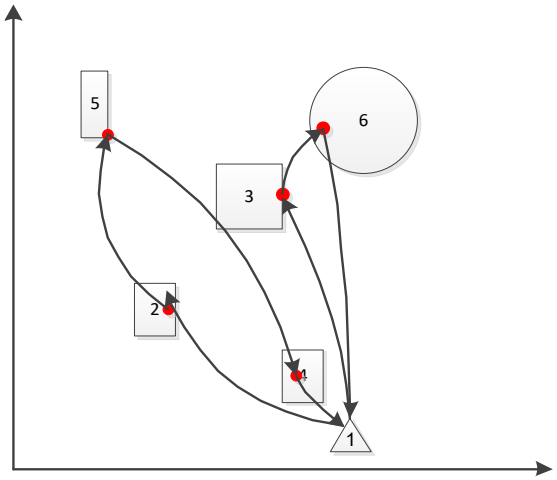
جدول ۴. محل تحویل در هر منطقه

Table 4. Delivery locations in each geographical area

ناحیه		۱	۲	۳	۴	۵	۶
مختصات	x	۲۵/۰	۱۱/۱	۲۰/۰	۲۱/۵	۷/۰	۲۴/۸
	y	۲/۰	۱۲/۴	۲۰/۳	۷/۰	۲۵/۰	۲۲/۲

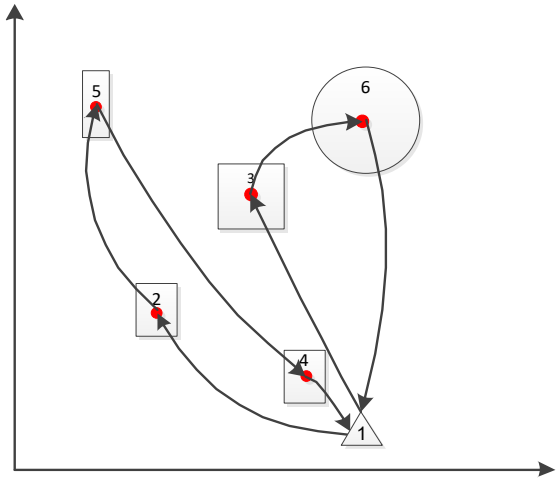
در شکل **۳**، مکان‌های تحویل و مسیرهای تشکیل‌شده بر اساس جواب تولیدشده توسط نرم‌افزار نشان داده شده است. در راستای تحلیل حساسیت، می‌توان بر هزینه حرکت امدادگران در نواحی تمرکز کرد. هرچه هزینه جابجایی امدادگران برای رسیدن به بالگرد افزایش یابد، مدل در این مثال، محل تحویل را به مرکز هر ناحیه نزدیک‌تر می‌کند. به‌عنوان‌مثال، با افزایش مقدار C_c به ۲۴۰۰ واحد، مسیر حرکت بالگردها مطابق شکل **۴** تغییر یافت.

در جدول **۵**، مختصات محل تحویل سفارشات در شرایطی که هزینه جابجایی درون نواحی بسیار بالا ($C_c = 2400$) است، ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که این مختصات دقیقاً بر مرکز ثقل نواحی منطبق است؛ یعنی همان نقطه‌ای که بیشترین احتمال حضور اکیپ‌ها را دارد. در این حالت، هزینه کل جابجایی به ۲۱۸۸۱ واحد افزایش یافته که نسبت به حالت پایه، رشد قابل‌توجهی را نشان می‌دهد.



شکل ۳. مسیر حرکت بالگردها و نقاط تحویل سفارشات در هر ناحیه (مطابق جدول **۲**).

Figure 3. Helicopter routes and delivery points per geographical area (as detailed in Table **2**).



شکل ۴. مکان‌های تحویل در حالت $C_c = 2400$.

Figure 4. Delivery locations under the scenario of high intra-area relocation cost ($C_c = 2400$).

جدول ۵. محل تحویل در هر ناحیه در شرایط $C_c = 2400$

Table 5. Delivery locations in each geographical area for $C_c = 2400$.

ناحیه		۱	۲	۳	۴	۵	۶
مختصات	x	۲۵/۰	۱۰/۵	۱۷/۵	۲۱/۵	۶/۰	۲۶/۰
	y	۲/۰	۱۲/۰	۲۱/۰	۷/۰	۲۷/۵	۲۶/۰

۵-۱- پیچیدگی محاسباتی و قابلیت تعمیم‌پذیری در ابعاد بزرگ

مدل ریاضی ارائه شده در این پژوهش، یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی مختلط تصادفی (MINLP) است. این کلاس از مسائل به دلیل ماهیت ترکیبی متغیرهای پیوسته (مکان ملاقات)، متغیرهای گسسته (ترتیب حرکت) و انتگرال‌های احتمالی در تابع هدف، از نظر محاسباتی بسیار دشوار (NP-hard) محسوب می‌شوند؛ به‌گونه‌ای که با افزایش تعداد مشتریان، فضای جستجو به‌صورت نمایی گسترش می‌یابد.

- **عملکرد در مقیاس کوچک:** در آزمون عددی انجام‌شده با ۵ مشتری، حل مدل با استفاده از نرم‌افزار GAMS و حل‌گر DICOPT بین ۳ تا ۵ دقیقه زمان برد. بااین‌حال، خروجی نرم‌افزار نشان داد که پاسخ به‌دست‌آمده لزوماً بهینه نیست و احتمال یافتن جواب‌های بهتر با جستجوی گسترده‌تر وجود دارد؛ این امر مؤید دشواری دستیابی به پاسخ بهینه مطلق حتی در ابعاد کوچک است.
- **چالش‌های مقیاس‌پذیری:** برای مسائل با تعداد مشتریان بیش از ۱۰ تا ۱۵ نفر، روش‌های حل دقیق (مانند شاخه و کران یا برنامه‌ریزی عدد صحیح) به دلیل رشد نمایی فضای جستجو و پیچیدگی محاسباتی انتگرال‌های احتمال، عملاً غیرقابل اجرا هستند. بر اساس ادبیات پژوهش، مسائل مشابه با ابعاد فراتر از ۲۰ مشتری، با استفاده از روش‌های دقیق قابل‌حل نیستند.
- **راهکارهای پیشنهادی برای ابعاد بزرگ:** جهت مواجهه با مسائل در ابعاد واقعی (۵۰ تا ۱۰۰ مشتری)، سه رویکرد استراتژیک پیشنهاد می‌شود:

۱) **الگوریتم‌های فراابتکاری:** استفاده از الگوریتم‌هایی نظیر جستجوی همسایگی بزرگ (LNS)، الگوریتم ژنتیک یا شبیه‌سازی تبرید برای دستیابی به پاسخ‌های نزدیک به بهینه در زمان معقول. این رویکرد در مطالعات مشابه (مانند Ozbaygin et al., 2017) با موفقیت مورداستفاده قرار گرفته است.

۲) **گسسته‌سازی فضای پیوسته:** تقلیل فضای پیوسته هر ناحیه به مجموعه‌ای محدود از نقاط کلیدی (مثلاً ۵ تا ۱۰ نقطه) جهت تبدیل مدل از یک مسئله غیرخطی پیوسته به یک مسئله ترکیباتی گسسته با پیچیدگی کمتر. این روش توسط نویسندگان توسعه یافته و در بخش‌های آتی گزارش خواهد شد. (این راهکار توسط مولف و همکارانش انجام شده و در آینده منتشر خواهد شد)

۳) **یادگیری ماشین:** بهره‌گیری از شبکه‌های عصبی یا یادگیری تقویتی جهت پیش‌بینی نقاط بهینه ملاقات بدون نیاز به حل مستقیم مدل، که به‌ویژه در کاربردهای تکرارپذیر بسیار کارآمد است.

۴) **مقایسه با ادبیات پژوهش:** در مسائل مشابه مانند VRPRDL، استفاده از روش‌های فراابتکاری برای ابعاد ۵۰ تا ۱۰۰ مشتری، زمان‌های حل چند دقیقه تا نیم ساعت را گزارش کرده است، درحالی‌که کیفیت پاسخ‌ها معمولاً با فاصله ۵ تا ۱۵ درصد از بهینه مطلق قرار دارد (Ozbaygin et al., 2017). انتظار می‌رود مدل پیشنهادی نیز عملکرد مشابهی داشته باشد، هرچند ارزیابی دقیق آن مستلزم پژوهش‌های مستقل است.

۵-۲- تحلیل حساسیت پارامترهای کلیدی

در این بخش، اثر تغییر چهار پارامتر اصلی بر خروجی مدل مورد تحلیل قرار گرفته است:

- **ابعاد ناحیه حرکت:** افزایش ابعاد ناحیه منجر به افزایش عدم قطعیت شده و مدل را وادار می‌کند نقاط ملاقات را به سمت مرکز ثقل ناحیه متمایل کند. در مقابل، کاهش ابعاد ناحیه، آزادی عمل مدل را برای بهینه‌سازی هم‌زمان مسیر و نقاط ملاقات افزایش داده و مسئله را به مدل کلاسیک VRP نزدیک می‌کند.
- **شدت تمرکز توزیع احتمال:** کاهش واریانس (تمرکز بیشتر توزیع) موجب می‌شود نقطه ملاقات با اطمینان بیشتری در نزدیکی مرکز ثقل انتخاب شود، درحالی‌که توزیع‌های پراکنده، مدل

را برای بهینه‌سازی مسیر بالگرد منعطف‌تر می‌سازد.

- **نسبت مشتریان متحرک:** درصورتی‌که کمتر از ٪۳۰ مشتریان متحرک باشند، رویکرد کلاسیک تقریب قابل‌قبولی ارائه می‌دهد؛ اما در صورت فراتر رفتن این نسبت از ٪۵۰، نادیده گرفتن ویژگی تصادفی منجر به خطای قابل‌توجهی خواهد شد.
- **سطح ریسک‌پذیری:** ریسک‌گریزی موجب انتقال نقاط ملاقات به نواحی با احتمال حضور بالاتر می‌شود (حتی اگر منجر به افزایش طول مسیر بالگرد شود)، درحالی‌که ریسک‌پذیری، نقاط ملاقات را به سمت نواحی با احتمال حضور کمتر اما با هزینه مسیر کمتر سوق می‌دهد.

۶- جمع‌بندی

در این مقاله، مدل عمومی برای مسئله مسیریابی وسایل نقلیه با در نظر گرفتن مکان متغیر و تصادفی مشتریان ارائه شد. همان‌گونه که ملاحظه شد، این مدل غیرخطی، پیوسته و تصادفی است و به دلیل دارا بودن متغیرهای صفر و یک، حل آن با استفاده از روش‌های موجود، به‌ویژه در ابعاد بزرگ، بسیار سخت و پیچیده است. بر همین اساس، باید به دنبال ساده‌سازی مدل یا استفاده از روش‌های حل برای مسائل غیرخطی بود. همچنین، می‌توان یک حد پایین و یک حد بالا برای این مسئله پیشنهاد کرد که در تحقیقات بعدی به آن پرداخته خواهد شد.

با توجه به اهمیت حمل‌ونقل از بعد مالی و زیست‌محیطی و با توجه به اینکه موضوع مطروحه در این مقاله کاملاً نوپا بوده و امکان توسعه آن در بسیاری از زمینه‌ها وجود دارد، مطالعات آتی در این زمینه می‌تواند گسترده باشد. از بررسی موارد عملی جدید تا توسعه خودِ مسئله و روش‌های حل، می‌توانند در این حوزه موردتوجه پژوهشگران قرار بگیرند. در ذیل به برخی از زمینه‌هایی که امکان توسعه در آن‌ها وجود دارد، اشاره می‌شود:

۱) به‌کارگیری VRP-MSCL در موضوعات عملیاتی جدید، یکی از موارد مطالعاتی است که می‌تواند در آینده به آن پرداخته شود.
۲) اضافه کردن محدودیت‌هایی که در مسائل کلاسیک VRP وجود دارد، در اینجا نیز می‌تواند موردتوجه قرار گیرد. مباحثی نظیر تحویل و برداشت، تعدد وسایل توزیع‌کننده، در نظر گرفتن چند انبار، وسایل نقلیه ناهمگن، محدودیت ظرفیت، امکان تحویل چندباره اقلام به مشتریان، ترکیب مسئله با پهپاد، در نظر گرفتن مشتریان بر روی یال‌ها، لحاظ کردن پنجره زمانی و... می‌توانند موضوعات پژوهشی آینده در این حوزه را تشکیل دهند.
۳) ترکیب مسئله مسیریابی با مکان متغیر و تصادفیِ مشتریان با مسائلی نظیر مکان‌یابی انبارها، تعیین موجودی بهینه و طراحی هاب نیز می‌تواند به‌عنوان مطالعات آتی موردتوجه محققین قرار گیرد.
۴) همان‌گونه که اشاره شد، حالت خاص این مسئله و وجود نواحی جغرافیایی که محل تردد مشتریان است، می‌تواند محققین را به ارائه روش‌های حل خاصی سوق دهد که هم جواب‌های دقیقی برای مسئله پیدا کنند و هم بتوانند روش‌های هیوریستیک و متاهیوریستیکی را برای رسیدن به جواب‌های نزدیک به بهینه توسعه دهند.
۵) مطالعات در زمینه روش‌های حل برای مدل پایه معرفی‌شده در این مقاله، یکی از موضوعاتی است که در آینده می‌توان بر روی آن متمرکز شد.
۶) روش‌های تبدیل مدل پیوسته به گسسته نیز می‌تواند در تحقیقات آتی موردتوجه پژوهشگران قرار گیرد.
۷) تقریب مدل غیرخطی معرفی‌شده در فصل سوم با مدل‌های خطی، از دیگر مواردی است که می‌تواند موردتوجه محققین در این حوزه قرار گیرد.

مشارکت‌های نویسندگان

ابوالفضل شفائی: تهیه پیش‌نویس خطی، بازنگری اولیه گزارش، روش‌شناسی پژوهش، مدل مفهومی پژوهش، بررسی ادبیات نظری و پیشینه مرتبط، تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، پیش‌نویس تحلیل آماری، بازبینی متن؛ **حسین**

شمس شمیرانی: راهنمایی، بازبینی متن؛ **محمدرضا اکبری جوکار:** راهنمایی، بازبینی متن؛ **مجید رفیعی:** راهنمایی، بازبینی متن.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ‌گونه تضاد منافع مرتبط با تحقیق حاضر ندارند و نتایج به‌صورت بی‌طرفانه و بدون دخالت منافع شخصی یا حرفه‌ای به‌دست‌آمده است.

قدردانی

نویسندگان صمیمانه از عوامل اجرایی نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری، داوران محترم و سایر افرادی که در بهبود کیفیت این مقاله همکاری داشته‌اند، قدردانی می‌نمایند.

مراجع

Birge, J. R., & Louveaux, F. (1997). *Introduction to stochastic programming*. New York, NY: Springer New York. https://doi.org/10.1007/0-387-22618-4_3

Dumez, D., Lehuédé, F., & Péton, O. (2021). A large neighborhood search approach to the vehicle routing problem with delivery options. *Transportation Research Part B: Methodological*, *144*, 103-132. https://doi.org/10.1016/j.trb.2020.11.012

Gambella, C., Naoum-Sawaya, J., & Ghaddar, B. (2018). The vehicle routing problem with floating targets: Formulation and solution approaches. *INFORMS Journal on Computing*, *30*(3), 554-569. https://doi.org/10.1287/ijoc.2017.0800

Gendreau, M., Laporte, G., & Séguin, R. (1996). Stochastic vehicle routing. *European journal of operational research*, *88*(1), 3-12. https://doi.org/10.1016/0377-2217(95)00050-X

Grabenschweiger, J., Doerner, K. F., Hartl, R. F., & Savelsbergh, M. W. (2021). The vehicle routing problem with heterogeneous locker boxes. *Central European Journal of Operations Research*, *29*(1), 113-142. https://doi.org/10.1007/s10100-020-00725-2

He, Y., Qi, M., Zhou, F., & Su, J. (2020). An effective metaheuristic for the last-mile delivery with roaming delivery locations and stochastic travel times. *Computers & Industrial Engineering*, *145*, 106513. https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106513

Hvattum, L. M., Løkketangen, A., & Laporte, G. (2006). Solving a dynamic and stochastic vehicle routing problem with a sample scenario hedging heuristic. *Transportation Science*, *40*(4), 421-438. https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0166

Jaillet, P. (1985). *Probabilistic traveling salesman problems* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).

Laporte, G. (2009). Fifty years of vehicle routing. *Transportation Science*, *43*(4), 408-416. https://doi.org/10.1287/trsc.1090.0301

Laporte, G., Chapleau, S., Landry, P. E., & Mercure, H. (1989). An algorithm for the design of mailbox collection routes in urban areas. *Transportation Research Part B: Methodological*, *23*(4), 271-280.

Lombard, A., Tamayo-Giraldo, S., & Fontane, F. (2018). Vehicle routing problem with roaming delivery locations and stochastic travel times (VRPRDL-S). *Transportation Research Procedia*, *30*, 167-177. https://doi.org/10.1016/j.trpro.2018.09.019

Mardešić, N., Erdelić, T., Carić, T., & Đurasević, M. (2023). Review of stochastic dynamic vehicle routing in the evolving urban logistics environment. *Mathematics*, *12*(1), 28. https://doi.org/10.3390/math12010028

Mendoza, J. E., Castanier, B., Guéret, C., Medaglia, A. L., & Velasco, N. (2011). Constructive heuristics for the multicompartment vehicle routing problem with stochastic demands. *Transportation science*, *45*(3), 346-363. https://doi.org/10.1287/trsc.1100.0353

Moccia, L., Cordeau, J. F., & Laporte, G. (2012). An incremental tabu search heuristic for the generalized vehicle routing problem with time windows. *Journal of the Operational Research Society*, *63*(2), 232-244. https://doi.org/10.1057/jors.2011.25

Murray, C. C., & Chu, A. G. (2015). The flying sidekick traveling salesman problem: Optimization of drone-assisted parcel delivery. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, *54*, 86-109. https://doi.org/10.1016/j.trc.2015.03.005

Özarık, S. S., Veelenturf, L. P., Van Woensel, T., & Laporte, G. (2021). Optimizing e-commerce last-mile vehicle routing and scheduling under uncertain customer presence. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, *148*, 102263. https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102263

Ozbaygin, G., & Savelsbergh, M. (2019). An iterative re-optimization framework for the dynamic vehicle routing problem with roaming delivery locations. *Transportation Research Part B: Methodological*, *128*, 207-235. https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.08.004

Ozbaygin, G., Karasan, O. E., Savelsbergh, M., & Yaman, H. (2017). A branch-and-price algorithm for the vehicle routing problem with roaming delivery locations. *Transportation*

Research Part B: Methodological, *100*, 115-137. https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.08.004

Pham, Q. A., Hà, M. H., Vu, D. M., & Nguyen, H. H. (2022, June). A hybrid genetic algorithm for the vehicle routing problem with roaming delivery locations. In *Proceedings of the International Conference on Automated Planning and Scheduling* (Vol. 32, pp. 297-306). https://doi.org/10.1609/icaps.v32i1.19813

Rastegar-Moghadam, H., Shafaei, A., & Jokar, M. R. A. (2019). *Modeling the vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery (VRPSPD) considering non-stationary customer locations within different time windows*. Proceedings of the 16th National Conference on Industrial Engineering. https://en.civilica.com/doc/1034895/

Reyes, D., Savelsbergh, M., & Toriello, A. (2017). Vehicle routing with roaming delivery locations. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, *80*, 71-91. https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.04.003

Rezvanian, S., Kashan, A. H., Rezvanian, A., & Sabzevari, A. (2025). Intelligent vehicle routing for stochastic service times: a grouping evolution strategy approach. *International Journal of Transportation Science and Technology*. https://doi.org/10.1016/j.ijtst.2025.04.009

Shafaei, A., Jokar, M. R. A., Rafiee, M., & Hemmati, A. (2021). *Using the stochastic programming for vehicle routing problems with the probability of customer absentee - a case study in a roadside assistance company*. Proceedings of the 16th National Conference on Industrial Engineering. https://en.civilica.com/doc/1034895/

Shafaei, A., Jokar, M. R. A., Rafiee, M., & Hemmati, A. (2025). Using the route planning for supplying spare parts to reduce distribution costs: a case study in a roadside assistance company. *International Journal of Shipping and Transport Logistics*, *20*(1), 131-158. https://doi.org/10.1504/IJSTL.2025.144995

Tilk, C., Olkis, K., & Irnich, S. (2021). The last-mile vehicle routing problem with delivery options. *Or Spectrum*, *43*(4), 877-904. https://doi.org/10.1007/s00291-021-00633-0

Wang, X., & Zhao, J. (2025). Distributionally robust optimization of the vehicle routing problem with uncertain customers. *Journal of Industrial and Management Optimization*, *21*(3), 1983-2006. https://doi.org/10.3934/jimo.2024159

Yuan, Y., Cattaruzza, D., Ogier, M., Semet, F., & Vigo, D. (2021). A column generation based heuristic for the generalized vehicle routing problem with time windows. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, *152*, 102391. https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102391