

An Equitable Guaranteed-Service Model for Multi-Echelon Safety Stock Placement under Budget and Capacity Constraints: Application to Election Logistics

Shahram Aliyari¹, Milad Hashemi¹, Ebrahim Teimoury²

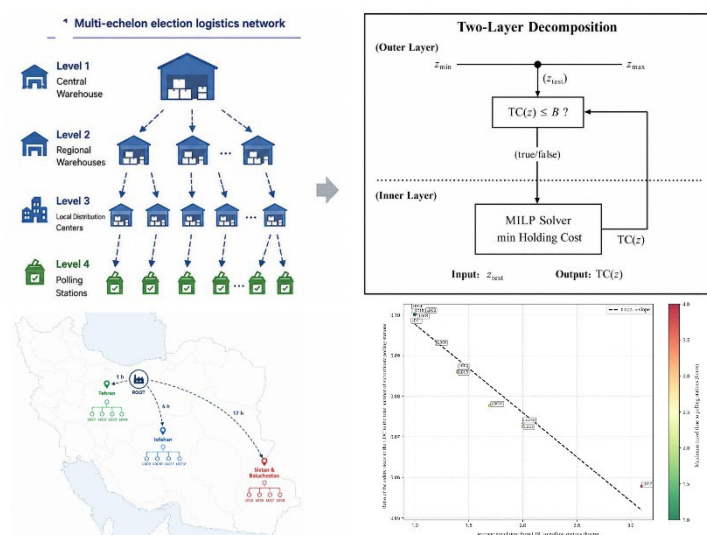
¹Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran

²School of Industrial Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

HIGHLIGHTS

- Equitable Guaranteed-Service Model for Multi-Echelon Safety Stock Placement
- Applying Two-layer solution and binary search over uniform safety factor and linearized MILP.
- Multi-echelon inventory optimization in election distribution network

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:

Article Type: Research paper

Received: 30 June 2026

Revised: 18 July 2026

Accepted: 29 July 2026

Available online: 1 August 2026

*Correspondence: shaliyari@ihu.ac.ir

How to cite this article:

Aliyari, S., Hashemi, M., & Teimoury, E. (2027). An Equitable guaranteed-service model for multi-echelon safety stock placement under budget and capacity constraints: application to election logistics. *System Engineering and Productivity*, 7 (1), 41-66.

Keywords:

Election logistics

Guaranteed Service Model (GSM)

Strategic Safety Stock Placement (SSSP)

Multi-Echelon Inventory Optimization (MEIO)

Safety stock

ABSTRACT

This paper presents a guaranteed-service model for the strategic safety stock placement in a multi-echelon distribution network. Unlike conventional guaranteed-service models, which are designed to minimize costs, the proposed model seeks to maximize the minimum service level provided to all nodes under a fixed budget constraint. To achieve this, a mixed-integer linear programming model with precomputed risk-exposure coefficients is embedded within a bisection search algorithm, enabling the max-min problem to be solved exactly. The model's performance is evaluated on a four-echelon election distribution network in Iran, comprising three provinces with distinct geographic and demographic characteristics. The results show that, under a realistic budget, the model can achieve a uniform service level of 99%, substantially outperforming the common practice of maintaining a fixed 10% safety-stock policy. The analysis also reveals that increasing the distance between local distribution centers and demand points reduces the effectiveness of risk pooling and shifts a larger share of safety stock to the lower echelons of the network. Furthermore, the study quantifies the cost of equity, demonstrating the extent of efficiency loss that must be accepted to guarantee equal access to resources. Overall, the research provides decision-makers with a rigorous tool for balancing equity and cost in resource-constrained multi-echelon distribution networks.

1. Introduction

Multi-echelon inventory systems face the dual challenge of allocating limited resources while ensuring equitable service across demand points (Axsäter, 2015; Snyder & Shen, 2019). Two paradigms address safety stock placement: stochastic service models (SSM) with random lead times, and guaranteed-service models (GSM), where each stage commits to a guaranteed service time and demand is bounded (Snyder & Shen, 2019). The classical GSM minimizes holding costs for a predetermined service level (Magnanti et al., 2006; Simpson, 1958). In many public-sector applications, however, the problem is reversed: given a fixed budget and capacity limits, how can the maximum uniform service level across all demand nodes be achieved? This question is critical for election logistics, where equality is a legally binding principle (Election Assistance Commission, 2023). Elections are large-scale, time-constrained events requiring complex material distribution under demand uncertainty and wide geographic dispersion (Election Assistance Commission, 2023). Despite operational guidelines from international bodies (e.g., IDEA, 2014; IFES, 2022), ballot shortages have occurred in Iran (Ana, 2021; Mehr, 2019), Pennsylvania (Scolforo, 2024), and Australia (Electoral Matters Committee, 2025), revealing the absence of a systematic inventory optimization approach in election networks. Research on elections has largely neglected the operational optimization of inventory and distribution, focusing instead on political and legal dimensions (Debrah et al., 2019). The GSM framework is uniquely suited to elections—a one-off event with a short horizon where service reliability is paramount—yet the existing GSM literature has not addressed equality-oriented objectives (Rolf et al., 2024; Yu et al., 2026).

To fill this gap, we develop a guaranteed-service model that maximizes the minimum cycle service level across all demand points under a fixed budget and capacity constraints, inverting the classical cost-minimization logic. The solution method couples a binary search over a uniform safety factor with an inner mixed-integer linear program (MILP) that linearizes risk windows via discrete time buckets and precomputed risk coefficients. Key contributions include: (1) a MILP-based exact solution with discretization and binary search that eliminates nonlinearities; (2) a max-min equity objective under a budget constraint; and (3) validation on Iran's real election network across three demographically distinct provinces (Tehran, Isfahan, Sistan and Baluchestan). The paper proceeds with a literature review, model formulation, case study, and conclusions.

2. Methodology

This study develops a guaranteed-service model for a four-echelon distribution network. The objective is

to maximize the minimum cycle service level across all demand points subject to a fixed budget, capacity limits, and deterministic transportation times. Unlike conventional guaranteed-service models that minimize cost for a given service level, the model treats the uniform service level as the decision target. To address the nonlinearity arising from the product of the safety factor and the square root of the risk window, the problem is decomposed into two layers. The outer layer performs a binary search over a single system-wide safety factor. For each candidate value, the inner layer solves a mixed-integer linear program that computes the minimum holding cost required to achieve that service level. The risk window at each node is represented by a discrete set of time buckets, with binary variables selecting the appropriate bucket. The square-root term is replaced by precomputed risk coefficients, eliminating nonlinearities and yielding a linear constraint.

The inner model minimizes total holding cost subject to risk window definitions, capacity limits, and the linearized safety stock requirements. If the minimal cost falls within the available budget, the binary search increases the lower bound of the safety factor; otherwise, the upper bound is reduced. The algorithm iterates until convergence, returning the highest feasible uniform safety factor and the corresponding service level. The model was implemented using the CBC solver.

3. Results and Discussion

Applied to a 4-echelon, 120-polling-station Iranian election network spanning three contrasting provinces, the model achieved a uniform 99% cycle service level under a fixed budget, fully utilizing the available funds without violating any capacity limits. Risk pooling reduced upstream demand variability, and the linearization proved exact. Geographic remoteness forced higher safety stock in distant regions; the farthest warehouse had to set a non-zero service time due to a 17-hour lead time, thereby raising costs. Isolating downstream distance revealed that longer last-mile travel times shift safety stock from distribution centers to polling stations, weakening upstream risk-pooling efficiency. The budget–equality efficiency frontier showed diminishing returns beyond the selected budget. The price of equity was quantified: compared with a model that maximized average service (and left some stations with zero safety stock), ensuring a uniform minimum of 99% required either a 0.37-point drop in the average safety factor or an additional 81,875 monetary units. Against current practice (a 10% flat safety margin), the model raised the worst-case service level from 76% to 99% without any extra budget, thereby demonstrating clear improvement. The framework effectively balances equity and cost under resource constraints, offering election planners a rigorous tool for equitable ballot distribution, and these findings

collectively underscore its practical utility for large-scale electoral logistics.

4. Conclusions

This paper introduced a guaranteed-service model for multi-echelon safety stock placement that maximizes the minimum service level across all demand points under a fixed budget and capacity constraints, reversing the conventional cost-minimization objective. Validated on Iran's election logistics network, the model achieved a uniform 99% cycle service level while respecting all constraints, substantially outperforming the current 10% flat-margin heuristic (76%). The analysis quantified the price of equity—both in terms of foregone average performance and additional monetary cost—and revealed how geographic remoteness weakens upstream risk pooling, driving inventory toward distant endpoints. The framework is transferable to humanitarian aid, vaccine distribution, and emergency supply chains. Future research may incorporate stochastic lead times, infrastructure disruptions, and dynamic in-event rebalancing to further enhance operational resilience.

Funding

This research received no external funding.

Author contributions

Shahram Aliyari: Conceptualization, Methodology, Literature review, Data collection, Formal analysis, Framework design, Writing – original draft, Writing – review & editing; **Milad Hashemi:** Methodology, Literature review, Data collection, Formal analysis, Framework design, Writing – original draft, Writing – review & editing; **Ebrahim Teimoury:** Methodology, Framework design, Supervision, Initial conceptualization, Data collection, Writing – original draft.

Conflicts of interest

There are no conflicts of interest associated with this research.

Acknowledgments

We are grateful to all colleagues who provided insights and expertise that greatly assisted this research. We also thank the anonymous reviewers for their valuable suggestions to improve the paper.

References

- Ana. (2021). *We are following up on complaints about the lack of ballots*. (In Persian). <https://ana.ir/fa/news/589060>
- Axsäter, S. (2015). *Inventory control*. Boston, MA: Springer US. <https://books.google.com/books?id=2eb5rQEA CAAJ>
- Debrah, E., Effah, J., & Owusu-Mensah, I. (2019). Does the use of a biometric system guarantee an acceptable election's outcome? Evidence from Ghana's 2012 election. *African Studies*, 78(3), 347-369. <https://doi.org/10.1080/00020184.2018.1519335>
- Election Assistance Commission. United States. (2023). *Election Management Guidelines*. Election Assistance Commission. <https://www.eac.gov/election-officials/election-management-guidelines>
- Electoral Matters Committee. (2025). Ballot paper shortages at the 2022 Victorian state election. <https://apo.org.au/node/330647>
- IDEA, I. (2014). *Electoral Management Design: Electoral Management Design*. International IDEA, Institute for Democracy and Electoral Assistance. <https://books.google.com/books?id=IjTYEAAA QBAJ>
- IFES. (2022). Introduction to Operational Planning: A Guide for Election Management Bodies. In: IFES. <https://www.ifes.org/publications/introduction-operational-planning-guide-election-management-bodies>
- Magnanti, T. L., Shen, Z. J. M., Shu, J., Simchi-Levi, D., & Teo, C. P. (2006). Inventory placement in acyclic supply chain networks. *Operations Research Letters*, 34(2), 228-238. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2005.04.004>
- Mehr. (2019). *Widespread public participation in elections/Possibility of tariff shortage in some areas*. (In Persian). <https://mehrnews.com/xRjGV>
- Rolf, B., Lavassani, K., Lang, S., & Reggelin, T. (2024). Optimizing Safety Stock Placement in Large Real-World Automotive Supply Networks Using the Guaranteed-Service Model. *Proceedings of the 57th Hawaii International Conference on System Sciences*. <https://doi.org/10.24251/HICSS.2024.209>
- Scolforo, M. (2024). Pennsylvania county settles federal lawsuit over ballot paper shortages in 2022 voting. *AP News*. <https://www.spotlightpa.org/news/2024/10/election-lawsuit-pennsylvania-luzerne-county-paper-shortage/>
- Simpson Jr, K. F. (1958). In-process inventories. *Operations Research*, 6(6), 863-873. <https://doi.org/10.1287/opre.6.6.863>
- Snyder, L. V., & Shen, Z. J. M. (2019). *Fundamentals of supply chain theory*. John Wiley & Sons.
- Yu, J., Huang, D., & Yang, C. (2026). Optimizing large-scale inventory networks: An iterative decomposition approach. *IIE Transactions*, 58(8), 982-996. <https://doi.org/10.1080/24725854.2025.2561557>

مدل خدمت‌دهی تضمین‌شده مبتنی بر عدالت برای استقرار موجودی اطمینان در شبکه‌های چندسطحی تحت محدودیت بودجه و ظرفیت: کاربردی در لجستیک انتخابات

شهرام علی‌یاری^۱، میلاد هاشمی^{۱*}، ابراهیم تیموری^۲

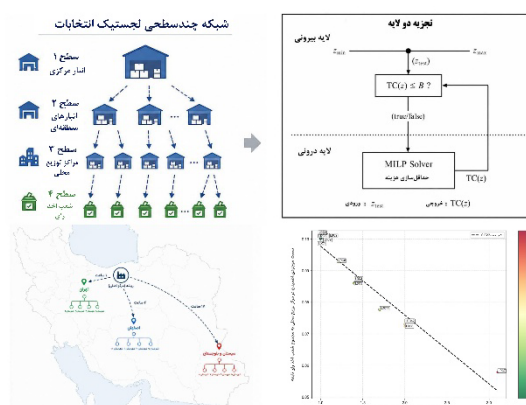
^۱ گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه امام حسین (ع)، تهران، ایران

^۲ دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

برجسته‌ها

- مدل سطح خدمت تضمین‌شده مبتنی بر عدالت
- به‌کارگیری راه حل دو لایه و جستجوی دودویی روی ضرب ایمنی یکنواخت و خطی شده MILP
- بهینه‌سازی استقرار موجودی در شبکه چندسطحی انتخابات

چکیده گرافیکی



مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۵/۰۴/۰۹

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۴/۲۷

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۰۷

ارائه برخط: ۱۴۰۵/۰۵/۱۰

*نویسنده مسئول:

shaliyari@ihu.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

مدل خدمت‌دهی تضمین‌شده
بهینه‌سازی موجودی چندسطحی
لجستیک انتخابات
استقرار راهبردی موجودی اطمینان
موجودی اطمینان

چکیده

این مقاله یک مدل خدمت‌دهی تضمین‌شده برای استقرار راهبردی موجودی اطمینان در یک شبکه توزیع چندسطحی ارائه می‌دهد. برخلاف مدل‌های رایج خدمت‌دهی تضمین‌شده که با هدف حداقل‌سازی هزینه طراحی شده‌اند، این مدل در شرایط بودجه‌ای ثابت، به دنبال حداکثرسازی کمترین سطح خدمت ارائه‌شده به تمام گره‌ها است. به این منظور، مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط با ضرایب مواجهه با ریسک از پیش محاسبه‌شده در الگوریتم دویخشی قرار داده شد تا مسئله حداکثر-حداقل به‌صورت دقیق حل شود. کارایی مدل بر روی شبکه توزیع چهارسطحی انتخابات در ایران، شامل سه استان با شرایط جغرافیایی و جمعیتی متفاوت، مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که تحت بودجه‌ای واقع‌بینانه، مدل قادر است سطح خدمت یکنواخت ۹۹ درصدی را محقق سازد که عملکرد آن به‌مراتب بهتر از رویه رایج مبتنی بر ۱۰ درصد موجودی اطمینان ثابت است. همچنین، تحلیل‌ها نشان می‌دهد که افزایش فاصله میان مراکز توزیع محلی و نقاط تقاضا، کارایی تجمع ریسک را کاهش داده و بخش بیشتری از موجودی اطمینان را به سطوح پایین‌دست شبکه منتقل می‌کند. علاوه بر این، تحلیل انجام‌شده هزینه عدالت را کمی‌سازی می‌کند و نشان می‌دهد که برای تضمین دسترسی برابر به منابع، چه میزان کاهش کارایی باید پذیرفته شود. در نتیجه، این پژوهش ابزاری دقیق در اختیار تصمیم‌گیرندگان قرار می‌دهد تا بتوانند در شبکه‌های چندسطحی دارای محدودیت منابع، میان عدالت و هزینه تعادل برقرار کنند.

۱- مقدمه

سیستم‌های موجودی چندسطحی نقشی مهم در تضمین دسترسی به موقع به کالاها ایفا می‌کنند. با وجود پیشرفت‌های چشمگیر در مدل‌های بهینه‌سازی موجودی چندسطحی^۱ (Snyder & Shen, 2019; Axsäter, 2015)، اغلب این سیستم‌ها با چالش دوسویه تخصیص منابع محدود و تامین سطوح خدمتی عادلانه برای نقاط تقاضا مواجه‌اند.

مسئله استقرار موجودی اطمینان در شبکه‌های چندسطحی از طریق دو رویکرد مدل‌سازی کلی انجام می‌شود: مدل‌های خدمت‌دهی تصادفی^۲ و مدل‌های خدمت‌دهی تضمین‌شده^۳. در مدل‌های SSM، هر مرحله با زمان‌های تامین تصادفی روبه‌روست (Axsäter, 2015). در مدل‌های GSM، هر مرحله متعهد به ارائه زمان خدمت تضمینی به مشتریان خود است. در این رویکرد، تقاضا کران‌دار فرض می‌شود و موجودی اطمینان به شکلی مستقر می‌شود که تمام تقاضا در زمان پاسخ تضمینی برآورده گردد (Snyder & Shen, 2019).

در رویکرد کلاسیک GSM که توسط سیمپسون (Simpson, 1958) ارائه شد، هدف، حداقل‌سازی کل هزینه‌های نگهداری برای سطح خدمتی از پیش تعیین‌شده است (Magnanti et al., 2006; Achkar et al., 2023; Snyder & Shen, 2019). اما در بسیاری از کاربردهای واقعی، به‌ویژه در بخش عمومی و عملیات‌های بشردوستانه، مسئله به شکل معکوس مطرح می‌شود: با در دست‌بودن بودجه‌ای ثابت و محدودیت‌های ظرفیت، چگونه می‌توان حداکثر سطح خدمت یکنواخت را برای تمام گره‌های تقاضا تضمین کرد؟ به عبارت دیگر، آیا می‌توان مدل GSM را به گونه‌ای بازتعریف کرد که به جای حداقل‌سازی هزینه، به حداکثرسازی حداقل سطح خدمت بپردازد؟

این پرسش به‌ویژه در حوزه‌هایی نظیر لجستیک انتخاباتی، توزیع کمک‌های بشردوستانه، کالاهای امدادی (Khoshnami & Mashayekhi, 2026) و شبکه‌های تامین سلامت عمومی اهمیت دارد. در حوزه‌های مثل انتخابات، برابری الزامی قانونی است (EAC, 2023).

انتخابات رویدادی در مقیاس بزرگ است که برنامه‌ریزی لجستیک آن پیچیدگی قابل‌توجهی دارد و آن را از عملیات لجستیک سایر بخش‌ها متمایز می‌کند. در انتخابات، مجموعه متنوعی از مواد و تجهیزات تحت مهلت‌های زمانی محدود و تغییرناپذیر باید تهیه، انبار و در شعب رای‌گیری متعدد توزیع شوند که تأخیر یا ناهماهنگی در جریان تامین و توزیع می‌تواند فرایند رأی‌گیری را مختل کرده و مشارکت و اعتماد عمومی را کاهش دهد (Iwuoha et al., 2021).

لجستیک انتخابات شامل کارکردهای لجستیکی متعارفی است که در بستری از عدم قطعیت تقاضا، محدودیت‌های زمانی و پراکندگی گسترده جغرافیایی قرار دارند. از جمله این کارکردها عبارت‌اند از: پیش‌بینی تقاضا، مدیریت موجودی، انبارداری، توزیع و امنیت (ACE, 2025b). پژوهش‌های انجام شده در این حوزه، لجستیک را به عنوان مؤلفه‌ای مهم برای موفقیت انتخابات به رسمیت شناخته‌اند (Claassen et al., 2008; Debrah et al., 2019; Iwuoha et al., 2021). با این حال، تمرکز پژوهش‌ها درباره انتخابات همواره بر ابعاد سیاسی، حقوقی و جامعه‌شناختی بوده و بهینه‌سازی عملیاتی سیستم موجودی و توزیع در این حوزه کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

با وجود راهنماهای عملیاتی گسترده‌ای که نهادهای بین‌المللی انتخابات تدوین کرده‌اند (برای مثال ACE, 2025b; CarterCenter, 2023; EAC, 2023; ElectionsGroup, 2025; IDEA, 2014; IFES, 2022; UNDP, 2025)، مشکلات متعددی در انتخابات‌های برگزار شده در جهان گزارش شده است. به عنوان مثال، کمبود برگه‌های رای گزارش شده در انتخابات ایران منجر به مشکلاتی در رای‌گیری شد (Ana, 2021; Mehr, 2019). در انتخابات برگزار شده در ایالت پنسیلوانیا در سال ۲۰۲۲، تخصیص نادرست موجودی موجب شد شعب اخذ رای با اتمام برگه‌های رای روبه‌رو شوند و رأی‌دهندگان به طور موقت از حق رای محروم شوند (Scolforo, 2024). همچنین، مورد مشابهی در انتخابات ایالتی ویکتوریا در استرالیا در سال ۲۰۲۲ گزارش شد (EMC, 2025; Orey et al., 2022). گزارش کردند که در انتخابات ایالات متحده، اختلال‌های جهانی و عدم قطعیت در مشارکت، راهبردهای تامین به‌هنگام را ناکافی ساخت. این ناکامی‌ها

¹ Multi-Echelon Inventory Optimization (MEIO)

² Stochastic Service Model (SSM)

³ Guaranteed Service Model (GSM)

انتخابات مستلزم در نظر گرفتن ذخایر اطمینان بیشتر، ظرفیت‌های انعطاف‌پذیر و سازوکارهای پاسخ‌گو به نوسانات تقاضا است.

رویکرد GSM به‌طور خاص برای لجستیک انتخابات مناسب است، زیرا انتخابات رویدادی یک‌باره و با افق زمانی محدود است که در آن پاسخ‌دهی سیستم به تقاضای پیش‌بینی نشده اولویت بالایی برای قابلیت اطمینان خدمت دارد.

ادبیات موجود در حوزه‌ی مدل‌های خدمت‌دهی تضمین‌شده تاکنون به مدل خدمت‌دهی تضمین‌شده با هدف برابری نپرداخته است. تعمیم‌های اخیر GSM بیشتر بر سناریوهای حالت پایا، زمان‌های تحویل تصادفی و سیاست‌های بازبینی متمرکز بوده‌اند (Achkar et al., 2023; Achkar et al., 2024; Rolf et al., 2024; Moncayo-Martínez, 2026; Moncayo-Martínez & Mastrocinque, 2025; Yu et al., 2026).

پژوهش حاضر با هدف پر کردن این شکاف، یک مدل خدمت‌دهی تضمین‌شده برای استقرار راهبردی موجودی اطمینان در شبکه‌های چندسطحی ارائه می‌دهد که در آن، هدف اصلی حداکثرسازی حداقل سطح خدمت چرخه‌ای در تمام گره‌های تقاضا، تحت محدودیت بودجه و ظرفیت است. برخلاف مدل‌های استاندارد GSM که هزینه نگهداری را برای سطح خدمتی معین حداقل می‌کنند، این مدل با الهام از الزام برابری در انتخابات، حداقل سطح خدمت را با رعایت بودجه ثابت و محدودیت‌های ظرفیت و امنیت حداکثر می‌کند. روش حل دقیق پیشنهادی، مسئله را به‌صورت مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط^۱ در چارچوب الگوریتم دو بخشی مدل می‌کند و بالاترین سطح خدمت یکنواخت ممکن را به‌طور کارآمد محاسبه می‌کند.

نوآوری‌های این پژوهش شامل ۳ مورد است:

(۱) ارائه‌ی مدل MILP با استفاده از گسسته‌سازی پنجره‌های زمانی و ضرایب مواجهه با ریسک از پیش‌محاسبه‌شده و الگوریتم دو بخشی که عبارت‌های غیرخطی را حذف می‌کنند.

(۲) هدف برابری از نوع حداکثر-حداقل با در نظر گرفتن محدودیت بودجه تعریف می‌شود. این

نشان‌دهنده فقدان رویکردی منسجم برای استقرار بهینه موجودی در شبکه چندسطحی انتخابات هستند. نهادهای انتخاباتی باید مشخص کنند که چه تعداد برگه رای در سطوح مختلف مستقر شود، به‌گونه‌ای که اصول راهنمای بنیادین انتخابات برآورده شود. از جمله مهمترین اصول راهنمای انتخابات دسترسی و برابری است که بر تمام عملیات رأی‌گیری تأثیر می‌گذارد و می‌تواند دشوارترین اصل برای مدیران باشد که بتوانند آن را به شیوه‌ای مقرون به‌صرفه دنبال کنند. از جمله دیگر اصول مهم عبارت‌اند از امنیت و سلامت، پایداری، شفافیت و ملاحظات قانونی (CarterCenter, 2023; ACE, 2025b; Norris, 2015; Charles et al., 2023; EAC, 2023; Shanton, 2019; Gheisari et al., 2015).

سیستم انتخاباتی بر عدم قطعیت تقاضا تأثیر زیادی می‌گذارد. علاوه بر نقش ثبت‌نام رأی‌دهندگان در تعیین واجدان شرایط رای دادن، شیوه ثبت‌نام تأثیر مستقیمی بر میزان عدم قطعیت تقاضا در عملیات انتخابات دارد. در نظام‌هایی که رأی‌دهندگان پیش از روز انتخابات ملزم به ثبت‌نام بوده و به حوزه یا شعبه اخذ رای مشخصی تخصیص می‌یابند، اطلاعات مربوط به تعداد و توزیع مکانی رأی‌دهندگان پیش از برگزاری انتخابات در دسترس قرار می‌گیرد. در نتیجه، بخش قابل‌توجهی از عدم قطعیت تقاضا در سطح شعب اخذ رای کاهش یافته و برنامه‌ریزی ظرفیت، تخصیص نیروی انسانی، تامین برگه‌های رأی و تجهیزات موردنیاز با دقت بیشتری امکان‌پذیر می‌شود (ACE, 2025b). این وضعیت در بسیاری از کشورهای اروپایی که از سامانه‌های ثبت‌نام دائمی و مبتنی بر ثبت احوال و محل سکونت استفاده می‌کنند مشاهده می‌شود. در مقابل، در کشورهایی نظیر ایران، بعضی از ایالت‌های آمریکا، عراق و برخی دیگر از کشورها، اگرچه فهرست واجدان شرایط رای دادن بر اساس اطلاعات ثبت احوال در دسترس است، ثبت‌نام قبلی برای شرکت در انتخابات الزامی نیست یا رأی‌دهندگان محدود به شعبه‌ای مشخص برای رای دادن نیستند (ACE, 2025a). برگزارکنندگان انتخابات علاوه بر عدم قطعیت ناشی از نرخ مشارکت، با عدم قطعیت مکانی تقاضا نیز مواجه هستند. در چنین شرایطی، مشخص نیست چه تعداد از واجدان شرایط در انتخابات شرکت خواهند کرد و هر یک در کدام شعبه اخذ رای حضور خواهند یافت. در نتیجه، برنامه‌ریزی عملیات

¹ Mixed-Integer Linear Programming (MILP)

پژوهش‌های متعددی در این زمینه انجام شده که (Axsäter, 2015) بخشی از آن‌ها را مرور کرده است. از سوی دیگر، تحقیقات در مورد GSM در سال‌های اخیر توجه فزاینده‌ای را به خود جلب کرده است.

در مدل‌های GSM، مرحله i زمان خدمت تعهدشده‌ای (CST) تعیین می‌کند که با i_k نشان داده می‌شود و طی آن موظف است هر تقاضایی را برآورده کند. برای تضمین این امر، در مدل‌های خدمت‌دهی تضمین‌شده، تقاضا از سمت بالا محدود است. فرض خدمت تضمین‌شده، مسئله‌ی استقرار راهبردی موجودی اطمینان^۱ (SSSPP) را قابل حل می‌کند. رابطه‌ی نزدیکی بین زمان خدمت تضمین‌شده^۲ (CST) و سطح موجودی پایه وجود دارد، زیرا موجودی پایه‌ی بالاتر به سطح مربوط اجازه می‌دهد CST کوتاه‌تری را ارائه دهد. در واقع، هر مجموعه‌ای از CST‌ها به مجموعه‌ای خاص از سطوح موجودی پایه منجر می‌شود، و معمولاً سطوح موجودی پایه (و نه CST‌ها) کمیت‌های اصلی مورد توجه هستند (Snyder & Shen, 2019).

سیمپسون در سال ۱۹۵۸ (Simpson, 1958) به بررسی شبکه‌های سری پرداخت و نشان داد که جواب‌های بهینه مسئله فقط می‌توانند در نقاط حدی مجموعه جواب قرار گیرند. این ویژگی، خاصیت همه یا هیچ یا خاصیت نقطه حدی نامیده می‌شود. پس از مدتی، ایندرفورث (Inderfurth, 1991) نشان داد که بهینه‌سازی شبکه‌های توزیع در چارچوب GSM مشابه حل سیستم سری است. خاصیت نقطه حدی امکان توسعه روش‌های دقیق کارآمدتری مانند برنامه‌ریزی پویا فراهم کرد که در سیستم‌های توزیع (Inderfurth, 1991)، سیستم‌های سری و مونتاژ (Minner, 1997) معرفی شده‌اند.

علاوه بر روش برنامه‌ریزی پویا، مدل‌های MILP برای این سیستم‌های معرفی شده است (Duc et al., 2022؛ Vicente et al., 2025؛ Porporatto et al., 2025). نایبرگ (Nyberg et al., 2013) نسخه‌ای اصلاح‌شده از مدل طراحی زنجیره تامین سه‌مرحله‌ای و استقرار موجودی اطمینان ارائه کردند. داک (Duc et al., 2022) برای دستیابی به مدل MILP زمان‌های ممکن تامین خالص را گسسته‌سازی کردند و با ارائه مرحله پیش‌پردازش برای

هدف، برخلاف رویکرد رایج حداقل‌سازی هزینه، به دنبال دستیابی به بالاترین سطح خدمت یکنواخت ممکن، با توجه به بودجه‌ی موجود است.

۳) اعتبارسنجی مدل بر روی شبکه‌ی واقعی انتخابات ایران با در نظر گرفتن سه استان با ویژگی‌های جغرافیایی و جمعیتی متفاوت از جمله تهران، سیستان و بلوچستان و اصفهان.

ساختار مقاله به این صورت است: در بخش دوم، پیشینه‌ی پژوهش و شکاف‌های ادبیات مرور می‌شود. بخش سوم به تشریح مدل ریاضی، خطی‌سازی و الگوریتم حل می‌پردازد. بخش چهارم شامل مطالعه‌ی موردی، داده‌ها و یافته‌های عددی است و در بخش پنجم، نتایج، بحث و پیشنهادات برای پژوهش‌های آتی ارائه می‌شود.

۲- پیشینه پژوهش

امکان کنترل کارآمد سیستم‌های موجودی چندسطحی در دو دهه اخیر به‌طور چشمگیری افزایش یافته است. یکی از دلایل این امر، پیشرفت در علوم زنجیره تامین و تحقیق در عملیات بوده که منجر به خلق روش‌های کارآمدتری شده است. بسیاری از شرکت‌ها از دو دهه اخیر از مزایای MEIO بهره برده‌اند. پروژه‌های متعددی درباره بهینه‌سازی چندسطحی ارائه شده‌اند. در ادامه، چند نمونه از این موارد ذکر شده‌اند.

مطالعات متعددی مزایای MEIO را نشان داده‌اند. به‌کارگیری MEIO ضمن بهبود سطح خدمت، موجودی و سرمایه در گردش را به‌طور قابل‌توجهی کاهش می‌دهد (برای مثال، (Moncayo-Martínez, 2026)). نحوه بهینه‌سازی سیستم‌های چندسطحی به توپولوژی شبکه بستگی دارد. در میان انواع آن، بهینه‌سازی موجودی در ساختارهای توزیع با چالش‌هایی همراه هست. برای سیستم‌های تک‌سطحی، سیاست (s, S) بهینه است. برخی نتایج بهینگی برای سیستم‌های سری وجود دارد (Clark & Scarf, 1960؛ Angelus & Song, 2023). اما برای اکثر سیستم‌های چندسطحی، سیاست بهینه ناشناخته است (Axsäter, 2015). ادبیات رویکرد SSM پیشینه‌ای گسترده دارد. از زمان ارائه مدل (Clark & Scarf, 1960)

^۱ Strategic Safety Stock Placement Problem (SSSPP)

^۲ Committed Service Time (CST)

حل مکرر مدل GSM قابل استفاده است (Edirisinghe & Almutairi, 2023).

هویه و همکاران (Hoye et al., 2015) به مسئله بهینه‌سازی موجودی چندمرحله‌ای در زمینه تجارت الکترونیکی فرامرزی پرداختند. همچنین (Moncayo-Martínez & Mastrocinque, 2025؛ Moncayo-Martínez, 2026؛ Rolf et al., 2024) به کاربرد مدل خدمت‌دهی تضمین‌شده برای بهینه‌سازی استقرار موجودی اطمینان در شبکه‌های بزرگ و واقعی پرداختند. ژنگ و همکاران (Zhang et al., 2024) چارچوب GSM را در یک سیستم خرده‌فروشی آنلاین مبتنی بر ارسال مستقیم از تأمین‌کننده برای تصمیمات مربوط به زمان خدمت و قیمت‌گذاری به‌کار گرفتند و نشان دادند که کاربردهای GSM فراتر از مسئله کلاسیک جایابی موجودی است. وانگ و همکاران (Wang et al., 2025) سیاست‌های نظام سقف و تجارت انتشار کربن را با مسئله جایابی موجودی اطمینان در چارچوب GSM تلفیق کردند و مبادله میان هزینه‌های موجودی و انتشار کربن را مورد بررسی قرار دادند.

در نهایت رویکرد این پژوهش از جنبه‌های متعددی با مطالعات موجود در حوزه GSM تفاوت دارد:

۱) اغلب ادبیات GSM، از پژوهش‌های بنیادین (Clark & Scarf, 1960) گرفته تا (Achkar et al., 2023؛ Achkar et al., 2024؛ Bendadou et al., 2021؛ Aouam et al., 2021؛ Magnanti et al., 2006؛ Graves & Willems, 2000؛ Rolf et al., 2024؛ Porporatto et al., 2025؛ Schoenmeyr & Graves, 2022؛ Schuster Puga et al., 2019) مسئله را به‌صورت حداقل‌سازی کل هزینه نگهداری برای سطح خدمت از پیش تعیین‌شده مدل کرده‌اند. در آن مدل‌ها، سطح خدمت ورودی برون‌زاست و تصمیم‌گیرنده حداقل هزینه لازم برای دستیابی به آن را به‌دست می‌آورد. پژوهش حاضر این منطق را به شکل دیگری در نظر می‌گیرد. در این پژوهش بودجه‌ای ثابت در نظر گرفته می‌شود و مدل به جست‌وجوی حداکثر ضریب ایمنی یکنواخت می‌پردازد که می‌تواند برای همه گره‌های تقاضا تأمین گردد. تاکنون مطالعه پیشینی در حوزه GSM که مسئله بهینه‌سازی را در

هر زمان تحویل کاندید، مقدار موجودی اطمینان و کمبود مورد انتظار را محاسبه کردند. کمپ و رامباو (Kamp & Rambau, 2022) با اصلاحی مبتنی بر جریان در مدل GSM امکان حل دقیق آن را در زمانی کوتاه بررسی کردند. پورپوراتو (Porporatto et al., 2025) نسخه‌ای اصلاح شده از مدل MILP به‌جای ساختار برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط با قیود درجه دوم^۱ یا MIQCP ارائه کردند. ایده اصلی آن‌ها بهره‌گیری از خاصیت نقاط حدی همه یا هیچ بود. ویسنه در سال ۲۰۲۵ (Vicente et al., 2025) مدل‌های MILP چنددوره‌ای برای سه سیاست بازبینی موجودی در زنجیره تأمین چندمرحله‌ای با تقاضای نامطمئن ارائه کردند: سیاست مقدار و دوره متغیر، سیاست مقدار ثابت و دوره متغیر و سیاست مقدار متغیر و دوره ثابت.

علاوه بر روش‌های حل برنامه‌ریزی پویا و MILP، روش‌های ابتکاری نیز ارائه شده‌اند (Aouam et al., 2021؛ Chamani et al., 2022). همچنین، تاکنون، تعمیم‌های متعددی بر روی مسئله کلاسیک GSM ارائه شده است. شوستر پوگا و همکاران (Schuster Puga et al., 2019) تصمیمات مربوط به مکان‌یابی تأسیسات، محل استقرار موجودی اطمینان و راهبرد تحویل را در زنجیره تأمین دومرحله‌ای یکپارچه کردند. آکار و همکاران (Achkar et al., 2023) مدل GSM را برای گره‌های ترکیبی با تقاضای وابسته، زمان‌های تأمین تصادفی، دوره‌های بازبینی تو در تو، نرخ پرشدگی و حداقل مقدار سفارش تعمیم دادند. سپس او و همکارانش (Achkar et al., 2024) سه بهبود دیگر به آن افزودند: تقریب خطی پله‌ای، تعمیم مبتنی بر توزیع گاما برای تقاضاهای پرنوسان، و تابع گسسته‌ای برای زمان‌های تأمین تصادفی که از ایده همه یا هیچ بهره می‌برد.

بندادو و همکاران (Bendadou et al., 2025) مدل GSM را به سیاست‌های بازنگری پیوسته (r, Q) تعمیم دادند و زمان‌های پردازش وابسته به مقدار سفارش و زمان‌های راه‌اندازی قابل‌کنترل را نیز در مدل لحاظ کردند. ادیریسینق و آلموتایری روشی عملی برای تصمیم‌گیری‌های مدیریتی ارائه کردند که بدون نیاز به

^۱ Mixed-Integer Quadratically Constrained Programming (MIQCP)

زمان‌های تحویل قطعی و افق برنامه‌ریزی محدود است. همچنین همبستگی منفی تقاضا در نظر گرفته شده است که واریانس تقاضای تجمعی را از طریق اثر تجمیع ریسک کاهش می‌دهد. در حالی که برخی مطالعات (مثل (Puga et al., 2019)) همبستگی تقاضای مثبت را در نظر گرفته‌اند، به‌کارگیری همبستگی منفی برای محدودتر کردن نیازمندی‌های موجودی اطمینان یک ویژگی نوآورانه است.

۳- مدل پیشنهادی

در این بخش، مسئله تعیین مقادیر موجودی اطمینان در شبکه توزیع چهار سطحی ارائه می‌شود. در این شبکه، هر گره با تقاضای تصادفی نرمال می‌تواند زمان خدمتی را به گره‌های پایین‌دست خود تضمین کند. هدف، حداکثرسازی کمترین سطح خدمت چرخه‌ای در میان تمامی گره‌های تقاضاست، به‌گونه‌ای که هیچ گره‌ای سطح خدمتی پایین‌تر از سایرین نداشته باشد. این هدف با رعایت سه دسته محدودیت دنبال می‌شود: بودجه کل نگهداری موجودی اطمینان، ظرفیت ذخیره‌سازی گره‌ها و معادلات مدل GSM که رابطه میان زمان‌های سفر، زمان‌های خدمت و پنجره‌های ریسک را برقرار می‌کنند. برای حل مسئله، ابتدا هدف حداکثر-حداقل به جستجوی ضریب ایمنی یکنواخت برای کل شبکه تبدیل می‌شود. سپس، الگوریتم دوبخشی در لایه بیرونی، بیشترین ضریب ایمنی قابل دستیابی را با توجه به بودجه تعیین می‌کند و در هر تکرار، یک مدل MILP در لایه درونی، حداقل هزینه متناظر را محاسبه می‌کند.

۱-۳- مفروضات اصلی

مفروضات اصلی به شرح زیر هستند:

- (۱) شبکه به‌صورت ساختار توزیع ۴ سطحی است. در مرحله پیش-استقرار راهبردی موجودی، انتقال جانبی بین گره‌های هم‌سطح مجاز نیست و تمام جریان‌ها از بالا به پایین هستند.
- (۲) زمان‌های سفر فیزیکی بین گره‌ها ثابت و مشخص هستند.

حلقه حداکثرسازی سطح خدمت قرار داده باشد، یافت نشد.

(۲) حل این مسئله از دولایه تشکیل شده است. در لایه درونی، مدل MILP هزینه نگهداری را حداقل می‌کند و در لایه بیرونی، الگوریتم دوبخشی مقدار z را به‌گونه‌ای تعیین می‌کند که بالاترین مقدار ممکن سازگار با بودجه به دست آید. این رویکرد با مدل‌های تک‌مرحله‌ای پیشین (Duc et al., 2022; Moncayo-Martínez & Mastrocinque, 2025; Porporatto et al., 2025) که مسئله را تنها برای مجموعه‌ی مشخصی از پارامترها حل می‌کنند، تفاوت دارد.

(۳) روندهای اخیر بر قابل‌حل کردن مدل برای نمونه‌های صنعتی بزرگ از طریق راهبردهای مختلف خطی‌سازی تمرکز دارند. از این جمله عبارت‌اند از مدل‌های QCP/MIQCP (Achkar et al., 2024; Achkar et al., 2023)، تخمین کاهشی مبتنی بر خطوط سکانت^۱ (Nyberg et al., 2013; Vicente et al., 2025; Moncayo-Martínez, Magnanti et al., 2006; Moncayo-Martínez & Mastrocinque, 2026; Nyberg et al., 2013, 2025)، تجزیه تکراری (Yu et al., 2026) و گسسته‌سازی همراه با انتخاب دودویی^۲ (Porporatto et al., 2025; Duc et al., 2022). خطی‌سازی عبارت مقعر ریشه دوم موجودی اطمینان از طریق گسسته‌سازی زمان تحویل خالص به بازه‌های زمانی صحیح یکنواخت و پیش‌محاسبه ضرایب تحویل، در کنار در نظر گرفتن مدل دو لایه برای محاسبه متغیر سطح خدمت رویکردی متفاوت است.

(۴) تعمیم‌های موجود GSM بیشتر به عملیات‌هایی با حالت پایا، افق نامحدود، زمان‌های تحویل تصادفی و تقاضای ایستا پرداخته‌اند (Achkar et al., 2024; Achkar et al., 2023; Klosterhalfen & Minner, 2010; Porporatto et al., 2025). در مقابل، پژوهش حاضر بر رویدادی یک‌باره تمرکز دارد که در آن

¹ Secant-based underestimation

² Successive piecewise linear approximation

³ Discretization combined with binary selection

انحراف معیار تقاضا در LDC d که به صورت	σ_d^{LDC}	۳) واریانس در طول هر پنجره ریسک خاص (زمان تدارک) به صورت واریانس تقاضای متناسب ^۱ محاسبه می‌شود. این واریانس به صورت کسری خطی از کل مدت زمان رویداد تک دوره‌ای است.
تعریف $\sqrt{\sum_p (\sigma_p^{PS})^2 + 2 \sum_{i < j} Cov(p_i, p_j)}$		
می‌شود.		
انحراف معیار تقاضا در RW w	σ_w^{RW}	۴) تقاضای گره‌های نهایی از توزیع نرمال پیروی می‌کند.
انحراف معیار تقاضا در R	σ^{Root}	۵) تاخیر خروجی در گره‌های نهایی و تاخیر ورود در گره ریشه صفر است.
زمان سفر از تامین‌کننده به R (دوره زمانی)	t_{ext}	۶) تمام تصمیمات مربوط به استقرار موجودی اطمینان، یک بار و قبل از شروع افق زمانی گرفته می‌شود.
زمان سفر از RW w به R	t_w^{RW}	۷) گره‌ها نمی‌توانند بیشتر از ظرفیت مجاز و امن موجودی نگهداری کنند.
زمان سفر از RW w به LDC d	$t_{w,d}^{LDC}$	۸) افق و دوره‌های زمانی گسسته هستند.
زمان سفر از LDC d به PS p	$t_{d,p}^{PS}$	
زمان سفر از گره $p(n)$ به گره n	$t_{p(n),n}$	
زمان‌های گسسته (به دوره زمانی پایه) تا حداکثر زمان تحویل ممکن شبکه و برابر با $0, 1, \dots, T_{max}$	$t \in T$	
کل مدت زمان رویداد تک دوره‌ای (دوره زمانی)	T_{day}	
هزینه واحد نگهداری در سطح Root	c^{Root}	
هزینه واحد نگهداری در سطح RW	c_w^{RW}	
هزینه واحد نگهداری در سطح LDC	c_w^{LDC}	
هزینه واحد نگهداری در سطح PS	c_d^{PS}	
حداکثر ظرفیت نگهداری فیزیکی در تسهیلات Root	Cap^{Root}	
حداکثر ظرفیت نگهداری فیزیکی در تسهیلات RW	Cap_w^{RW}	
حداکثر ظرفیت نگهداری فیزیکی در تسهیلات LDC	Cap_w^{LDC}	
حداکثر ظرفیت نگهداری فیزیکی در تسهیلات PS	Cap_d^{PS}	
کل بودجه موجود برای تخصیص موجودی اطمینان	B	
ضریب ایمنی سطح خدمت هدف (ارائه شده توسط لایه بیرونی) و برابر با $\varphi^{-1}(\alpha)$	z	
برای جلوگیری از غیرخطی شدن مدل در محاسبه ریشه‌ی دوم توسط حل‌کننده، ضریب ریسک مواجهه برای هر بازه زمانی ممکن $t \in T$ از قبل محاسبه $(\sqrt{t/T_{day}})$ می‌شود.	Γ_t	
تاخیر تضمین‌شده توسط PS. نقاط تقاضا مستقیماً با مشتریان در ارتباط هستند و زمان ارائه خدمت خروجی آن‌ها صفر است.	$S_p^{PS} = 0$	
تاخیر ورودی به Root صفر است.	$S^{ext} = 0$	

متغیرهای تصمیم

تاخیر تضمین شده توسط Root به RW ها.	$S^{Root} \geq 0$
تاخیر تضمین شده توسط RW w به LDC ها.	$S_w^{RW} \geq 0$
تاخیر تضمین شده توسط LDC d به PS ها.	$S_d^{LDC} \geq 0$

۳) واریانس در طول هر پنجره ریسک خاص (زمان تدارک) به صورت واریانس تقاضای متناسب^۱ محاسبه می‌شود. این واریانس به صورت کسری خطی از کل مدت زمان رویداد تک دوره‌ای است.

۴) تقاضای گره‌های نهایی از توزیع نرمال پیروی می‌کند.

۵) تاخیر خروجی در گره‌های نهایی و تاخیر ورود در گره ریشه صفر است.

۶) تمام تصمیمات مربوط به استقرار موجودی اطمینان، یک بار و قبل از شروع افق زمانی گرفته می‌شود.

۷) گره‌ها نمی‌توانند بیشتر از ظرفیت مجاز و امن موجودی نگهداری کنند.

۸) افق و دوره‌های زمانی گسسته هستند.

۲-۳- مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترها

شبکه چندسطحی و محدودیت‌های آن توسط مجموعه‌ها و پارامترهای ورودی زیر تعریف می‌شوند.

مجموعه‌ها و اندیس‌ها

سطح ۱: تامین‌کننده اصلی یا گره ریشه	R
سطح ۲: مجموعه انبارهای منطقه‌ای (RW) که با اندیس w نشان داده می‌شود.	$w \in W$
سطح ۳: مجموعه مراکز توزیع محلی (LDC) که با اندیس d نشان داده می‌شود.	$d \in D$
سطح ۴: مجموعه نقاط تقاضا (PS) که با اندیس p نشان داده می‌شود.	$p \in P$
مجموعه مراکز توزیع محلی که به انبار منطقه‌ای w اختصاص یافته است.	D_w
مجموعه نقاط تقاضایی که به مرکز توزیع محلی d اختصاص یافته است.	P_d
مجموعه تمام گره‌ها در شبکه و برابر با $R \cup W \cup D \cup P$	$n \in N$
گره والد مستقیم گره n	$p(n)$
مجموعه تمام گره‌های والد در طول مسیر از گره n تا گره Root.	$A(n)$
زمان‌های گسسته (به دوره زمانی پایه) تا حداکثر زمان تحویل ممکن شبکه و برابر با $0, 1, \dots, T_{max}$	$t \in T$

پارامترها

انحراف معیار تقاضا در گره p	σ_p^{PS}
-------------------------------	-----------------

^۱ Prorated demand variance

$$L_n = S_{p(n)} + t_{p(n),n} - S_n \quad \forall n \in N \quad (3)$$

$$SS_n \geq z \cdot \sigma_{day,n} \sqrt{\frac{L_n}{T_{day}}} \quad \forall n \in N \quad (4)$$

$$SS_n \leq Cap_n \quad \forall n \in N \quad (5)$$

$$S_n \geq 0, \quad L_n \geq 0, \quad SS_n \geq 0 \quad \forall n \in N \quad (6)$$

در تابع هدف (۱) حداقل سطح خدمت α در نقاط تقاضا به حداکثر می‌رسد. در اینجا دو مورد حائز توجه است:

(۱) در مدل استاندارد GSM تابع هدف به صورت

$$\sum h_i \cdot z \cdot \sigma_i \sqrt{SI_i + T_i - S_i}$$

هدف حداقل‌سازی هزینه بدون محدودیت

بودجه است (Snyder & Shen, 2019). با این

حال، در این مدل الگوی معکوسی ارائه شده

است که در آن هر نقطه تقاضا، صرف نظر از

موقعیت مکانی آن، بالاترین احتمال ممکن را

برای تمام نشدن موجودی خواهد داشت

(۲) از نظر ریاضی ترجمه عبارت حداکثرسازی

حداقل سطح خدمت در نقاط تقاضا برابر است با

$$\max \left(\min_{p \in P} \alpha_p \right)$$

هدف (۳) برابر است، زیرا اگر تمام نقاط تقاضا

سطوح خدمت متفاوتی داشته باشند، گره‌ای که

کمترین سطح خدمت را دارد به گلوگاه تبدیل

می‌شود و هر مقدار بودجه که از گره با α بالاتر

به گره با α پایین‌تر تخصیص یابد، حداقل سطح

خدمت را بدون نقض امکان‌پذیری افزایش

می‌دهد تا زمانی که تمام گره‌ها به سطح خدمت

یکسانی برسند. در نتیجه، راه‌حل بهینه مسئله

حداکثر-حداقل باید مقادیر α_p را در تمام نقاط

تقاضا برابر سازد و تابع هدف به حداکثرسازی α

یکنواخت واحد (یا به‌طور معادل، ضریب ایمنی

واحد z) تبدیل شود. این نتیجه‌گیری امکان

تجزیه بعدی مدل را فراهم می‌کند. لایه بیرونی

می‌تواند به جست‌وجوی z واحد در سطح کل

سیستم بپردازد که محدودیت بودجه را رعایت

کند و لایه درونی امکان‌پذیری آن z را بررسی

کرده و حداقل هزینه متناظر را محاسبه می‌کند.

محدودیت (۲) نشان می‌دهد که کل هزینه موجودی

اطمینان تعیین‌شده نمی‌تواند از بودجه تجاوز کند.

$$S_n \geq 0$$

تاخیر تضمین شده توسط گره n به

گره‌های زیر مجموعه خود

$$S_{p(n)} \geq 0$$

تاخیر تضمین شده توسط گره والد گره n

به گره فرزند

$$L^{Root} \geq 0$$

پنجره ریسک (زمان تحویل موثر) برای R

پنجره ریسک برای RW ها

$$L^{LDC} \geq 0$$

پنجره ریسک برای LDC ها

پنجره ریسک برای PS ها

$$L_n \geq 0$$

پنجره ریسک برای گره n

$$SS^{Root} \geq 0$$

مقدار موجودی اطمینان در R

$$SS^{RW} \geq 0$$

مقدار موجودی اطمینان در RW ها

$$SS^{LDC} \geq 0$$

مقدار موجودی اطمینان در LDC ها

$$SS^{PS} \geq 0$$

مقدار موجودی اطمینان در PS ها

$$X_t^{Root} \in 0,1 \forall t \in T$$

متغیر خطی‌سازی دودویی: اگر بازه زمانی

t به‌عنوان پنجره ریسک برای تسهیلات

انتخاب شود مقدار ۱ را می‌گیرد، در

اینصورت ۰ است.

$$X_{w,t}^{RW} \in 0,1 \forall w \in W, t \in T$$

متغیر خطی‌سازی دودویی: اگر بازه زمانی

t به‌عنوان پنجره ریسک برای تسهیلات

انتخاب شود مقدار ۱ را می‌گیرد، در

اینصورت ۰ است.

$$X_{d,t}^{LDC} \in 0,1 \forall w \in W, d \in D_w, t \in T$$

متغیر خطی‌سازی دودویی: اگر بازه زمانی

t به‌عنوان پنجره ریسک برای تسهیلات

انتخاب شود مقدار ۱ را می‌گیرد، در

اینصورت ۰ است.

$$X_{p,t}^{PS} \in 0,1 \forall w \in W, d \in D_w, p \in P_d, t \in T$$

متغیر خطی‌سازی دودویی: اگر بازه زمانی

t به‌عنوان پنجره ریسک برای تسهیلات

انتخاب شود مقدار ۱ را می‌گیرد، در

اینصورت ۰ است.

۳-۳- مدل (پیش از خطی‌سازی)

توجه: جهت خوانایی بیشتر، در مدل اولیه و غیرخطی، از

اندیس عمومی گره $n \in N$ استفاده می‌شود. اندیس‌های

اختصاصی هر سطح و ساختار چهارسطحی در مدل

خطی‌سازی شده MILP که در بخش بعدی ارائه می‌شود،

مجدداً معرفی خواهند شد.

$$\max(\min \alpha) \quad (1)$$

به‌طوری که:

$$\sum_{n \in N} c_n \cdot SS_n \leq B \quad (2)$$

۳-۴- مدل (پس از خطی‌سازی و تجزیه دولایه)

مدل ارائه شده چند مشکل محاسباتی دارد. اگر سطح خدمت به‌عنوان متغیر تصمیم در نظر گرفته شود و هدف حداکثرسازی آن باشد، با تابع توزیع تجمعی معکوس توزیع نرمال $(\Phi^{-1}(z))$ مواجه هستیم که مسئله را به شکل برنامه‌ریزی مختلط عدد صحیح غیرخطی تبدیل خواهد کرد. علاوه بر این، مولفه حداکثر-حداقل در تابع هدف مشتق‌پذیر نیست. همچنین، اگر محدودیت (۳) و (۴) در محدودیت (۲) جایگزین شود تا محدودیت بودجه بر حسب متغیرهای تصمیم بیان شود، معادله ۹ به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n \in N} c_n \cdot \left(\varphi^{-1}(\alpha) \cdot \sigma_{day,n} \sqrt{\frac{S_{P(n)} + t_{P(n),n} - S_n}{T_{day}}} \right) \leq B \quad (9)$$

این محدودیت، مدل را از نظر ریاضی برای شبکه‌های بزرگ به دلیل دو عامل ترکیبی زیر، غیرقابل حل می‌کند:

- ۱) ضریب ایمنی متغیر تصمیم‌گیری پیوسته است و زمان‌های خدمت نیز متغیرهای تصمیم‌گیری هستند. ضرب آنها در یکدیگر منجر به برنامه‌ریزی غیرخطی می‌شود.
- ۲) متغیرهای زمان خدمت در تابع ریشه دوم قرار دارند. از آنجا که تابع ریشه دوم مقعر بوده و در متغیر z ضرب شده است، ناحیه امکان‌پذیر تعریف شده توسط این محدودیت غیرمحدب است.

اگر در این مدل تک مرحله‌ای سعی شود که L_n مقادیر گسسته داشته باشد و α به‌عنوان متغیر تصمیم‌گیری در نظر گرفته شود، این مسئله به مدل برنامه‌ریزی غیرخطی مختلط عدد صحیح (MINLP) تبدیل می‌شود که برای شبکه‌ای بزرگ از گره‌ها NP-hard است و از نظر محاسباتی حل آن در مدت زمان معقول غیرممکن خواهد بود. برای رفع این پیچیدگی محاسباتی باید مسئله را تجزیه کرد تا تعامل غیرخطی بین z و L_n از بین برود.

اگر z به‌طور موقت به‌عنوان پارامتر ثابت در نظر گرفته شود، هدف از حداکثرسازی z به حداقل‌سازی هزینه برای z از پیش تعیین‌شده تغییر می‌کند. این روش، فرم مسئله

محدودیت (۳) پنجره ریسک برای هر گره را نشان می‌دهد. این محدودیت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(7) \quad \text{تاخیر تضمین شده گره والد} = \text{پنجره ریسک} \\ \text{تاخیر تضمین شده گره} - (\text{زمان سفر}) +$$

محدودیت (۴) اندازه موجودی اطمینان را در گره n نشان می‌دهد. از آنجایی که این مدل برای رویدادهای تک‌دوره‌ای در نظر گرفته شده است، موجودی اطمینان، تنها واریانس را در طول پنجره ریسک (L_n) نسبت به کل طول رویداد (T_{day}) پوشش می‌دهد. بنابراین موجودی اطمینان یک گره و تمام گره‌های بالاتر از آن (موجودی سطح) باید حداقل به اندازه‌ای باشد که واریانس تقاضا را در ضریب ایمنی z در طول پنجره ریسک پوشش دهد. به این ترتیب باید معادله (۸) را در نظر گرفت.

$$SS_n + \sum_{j \in A(n)} SS_j \geq z \cdot \sigma_{day,n} \sqrt{\frac{L_n}{T_{day}}} \quad (8) \\ \forall n \in N$$

با این حال، در مدل خدمت‌دهی تضمین شده (Snyder & Shen, 2019)، موجودی فیزیکی سطوح بالاتر با سطح فعلی جمع نمی‌شود. در واقع، موجودی اطمینان سطوح بالاتر، به‌طور ضمنی در L_n در نظر گرفته می‌شود. این موضوع به این دلیل است که سطوح موجودی زمان خدمت‌دهی آن‌ها را تعیین کرده و بر زمان پنجره ریسک تاثیر می‌گذارد. بنابراین، اگر سطح بالاتر موجودی بیشتری داشته باشد، آن سطح می‌تواند زمان خدمت ۰ را تضمین کند و با توجه به معادله (۷) L_n کوتاه‌تر می‌شود و به SS_n کمتری نیاز است. پس، سطح بالاتر با نگهداری موجودی به سطح پایین‌تر کمک کرده است تا نیازی به نگهداری موجودی نداشته باشد. حال اگر سطح بالاتر موجودی نداشته باشد، آن سطح نمی‌تواند در زمان کوتاهی خدمت‌دهی کند. بنابراین، برای تامین موجودی، مهلت زمانی بیشتری در نظر خواهد گرفت تا مجدد موجودی‌اش را افزایش دهد. این امر باعث می‌شود L_n طولانی‌تر شود و SS_n افزایش یابد. پس معادله موجودی اطمینان همان محدودیت (۴) است که این ذخیره در گره n باید واریانس تقاضای مورد انتظار را در طول بازه ریسک خاص خود پوشش دهد. محدودیت‌های (۵) و (۶) به‌ترتیب محدودیت ظرفیت فیزیکی و محدودیت‌های منطقی را نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} \min TC(z) &= c^{Root} \cdot SS^{Root} + \sum_{w \in W} (c_w^{RW} \cdot SS_w^{RW}) \\ &+ \sum_{w \in W} \sum_{d \in D_w} (c_d^{LDC} SS_d^{LDC}) \\ &+ \sum_{w \in W} \sum_{d \in D_w} \sum_{p \in P_d} (c_p^{PS} SS_p^{PS}) \end{aligned} \quad (14)$$

با توجه به:

$$L^{Root} = t_{ext} - S^{Root} \quad (15)$$

$$L_w^{RW} = S^{Root} + t_w^{RW} - S_w^{RW} \quad \forall w \in W \quad (16)$$

$$L_d^{LDC} = S_w^{RW} + t_{w,d}^{LDC} - S_d^{LDC} \quad \forall w \in W, d \in D_w \quad (17)$$

$$L_p^{PS} = S_d^{LDC} + t_{d,p}^{PS} \quad \forall w \in W, d \in D_w, P \in P_d \quad (18)$$

$$\sum_{t \in T} X_t^{Root} = 1 \quad (19)$$

$$\sum_{t \in T} X_{w,t}^{RW} = 1 \quad \forall w \in W \quad (20)$$

$$\sum_{t \in T} X_{d,t}^{LDC} = 1 \quad \forall w \in W, d \in D_w \quad (21)$$

$$\sum_{t \in T} X_{p,t}^{PS} = 1 \quad \forall w \in W, d \in D_w, P \in P_d \quad (22)$$

$$L^{Root} = \sum_{t \in T} (t \cdot X_t^{Root}) \quad (23)$$

$$L_w^{RW} = \sum_{t \in T} (t \cdot X_{w,t}^{RW}) \quad \forall w \in W \quad (24)$$

$$L_d^{LDC} = \sum_{t \in T} (t \cdot X_{d,t}^{LDC}) \quad \forall w \in W, d \in D_w \quad (25)$$

$$L_p^{PS} = \sum_{t \in T} (t \cdot X_{p,t}^{PS}) \quad \forall w \in W, d \in D_w, P \in P_d \quad (26)$$

$$SS^{Root} \geq z \cdot \sigma^{Root} \cdot \sum_{t \in T} (\Gamma_t \cdot X_t^{Root}) \quad (27)$$

$$SS_w^{RW} \geq z \cdot \sigma_w^{RW} \cdot \sum_{t \in T} (\Gamma_t \cdot X_{w,t}^{RW}) \quad \forall w \in W \quad (28)$$

را به ساختار استاندارد حداقل‌سازی هزینه در رویکرد GSM بازمی‌گرداند (Snyder & Shen, 2019).

حتی با ثابت بودن z ، عبارت L_n همچنان غیرخطی است. با این حال، از آنجایی که L_n معرف زمان است، می‌توان آن را به بازه‌های زمانی گسسته T تبدیل کرد. عبارت جذر با استفاده از روش جایگذاری متغیرهای تصمیم‌گیری دودویی $X_{n,t}$ خطی‌سازی می‌شود (Duc et al., 2022; Porporatto et al., 2025). در نتیجه معادله موجودی اطمینان غیرخطی با این سه معادله جایگزین می‌شوند:

(۱) باید یک مدت زمان مشخص از بازه زمانی برای پنجره ریسک هر گره انتخاب شود.

$$\sum_{t \in T} X_{n,t} = 1 \quad \forall n \in N \quad (10)$$

(۲) متغیر L_n باید با بازه زمانی انتخاب شده برابر باشد.

$$L_n = \sum_{t \in T} (t \cdot X_{n,t}) \quad \forall n \in N \quad (11)$$

(۳) برای جلوگیری از محاسبه ریشه دوم، ضریب ریسک مواجهه برای $t \in T$ از پیش محاسبه می‌شود و در معادله موجودی اطمینان قرار داده می‌شود:

$$\Gamma_t = \sqrt{t/T_{day}} \quad (12)$$

$$SS_n \geq z \cdot \sigma_{day,n} \cdot \sum_{t \in T} (\Gamma_t \cdot X_{n,t}) \quad (13)$$

$\forall n \in N$

بنابراین، مدل MILP از نظر ساختاری به معماری دو لایه زیر تبدیل می‌شود:

(۱) لایه درونی: با در نظر گرفتن z به‌عنوان پارامتر ورودی و خطی‌سازی L_n مسئله MILP حل می‌شود.

(۲) لایه بیرونی (جستجوی دوبخشی): از آنجایی که هزینه کل موجودی با افزایش سطح خدمت به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد، می‌توان از الگوریتم جستجوی دوبخشی استفاده کرد. لایه بیرونی به‌صورت تکرارشونده مقدار مشخصی از z را در نظر می‌گیرد و سپس در مدل MILP، کمترین هزینه ممکن را برای آن مقدار بدست می‌آورد و با بودجه B مقایسه می‌کند.

تابع هدف لایه درونی حداقل‌سازی هزینه است.

گام ۳. مقدار z_{test} در مسئله MILP قرار می‌گیرد. حل‌کننده، هزینه کل حداقل $TC(z_{test})$ و متغیرهای (S_n, SS_n) را باز می‌گرداند. اگر حل MILP غیرممکن باشد (به این معنی که z_{test} آن‌قدر بالاست که موجودی اطمینان مورد نیاز، محدودیت‌های ظرفیت را نقض می‌کند)، این حالت معادل $TC(z_{test}) = \infty$ در نظر گرفته می‌شود.

گام ۴. اگر $TC(z_{test}) > B$ باشد z_{test} از بودجه فراتر است. در نتیجه: $z_{max} = z_{test}$ و اگر $TC(z_{test}) \leq B$ باشد، سطح عدالت قابل پرداخت است. در نتیجه:

$$z_{min} = z_{test}$$

گام ۵ (توقف): اگر $(z_{max} - z_{min}) \leq \varepsilon$ ، الگوریتم متوقف می‌شود. سطح عدالت بهینه سراسری $z^* = z_{min}$ و سطح خدمت بهینه حداکثر-حداقل به دست می‌آید که $\alpha^* = \Phi(z^*)$ است. در غیر این صورت، به گام ۲ بازگشت می‌شود.

انتخاب الگوریتم جستجوی دوبخشی به دلیل یکنوایی تابع حداقل هزینه کل نسبت به ضریب ایمنی z است. با افزایش z ، موجودی اطمینان مورد نیاز در تمامی گره‌ها افزایش می‌یابد و در نتیجه، $TC(z)$ تابعی صعودی و یکنوا خواهد بود. بنابراین، الگوریتم دوبخشی می‌تواند بزرگ‌ترین ضریب ایمنی قابل دستیابی با بودجه B را در حدود $\log_2\left(\frac{z_{max}-z_{min}}{\varepsilon}\right)$ تکرار و با تضمین همگرایی به جواب بهینه سراسری تعیین کند.

در مقابل، مدل‌سازی یکپارچه این مسئله به صورت MINLP، به دلیل حضور هم‌زمان متغیر پیوسته z ، متغیرهای دودویی $X_{n,t}$ و عبارات غیرخطی، به مدلی غیرمحدب تبدیل می‌شود که حل آن با استفاده از حل‌کننده‌های تجاری CPLEX یا BARON در GAMS حتی برای نمونه‌های کوچک نیز بسیار زمان‌بر است و دستیابی به جواب بهینه سراسری را در زمان قابل قبول با دشواری مواجه می‌کند. در رویکرد پیشنهادی، جستجوی z به الگوریتم دوبخشی واگذار شده و برای هر مقدار ثابت z ، تنها یک مدل MILP حل می‌شود. این تجزیه، ضمن حفظ تضمین بهینگی، زمان حل را به چند ثانیه کاهش می‌دهد و با تبدیل مسئله دشوار MINLP به دنباله‌ای از مسائل MILP، کارایی محاسباتی را به‌طور چشمگیری افزایش می‌دهد.

$$SS_d^{LDC} \geq z \cdot \sigma_d^{LDC} \cdot \sum_{t \in T} (\Gamma_t \cdot X_{d,t}^{LDC}) \quad \forall w \in W, d \in D_w \quad (29)$$

$$SS_p^{PS} \geq z \cdot \sigma_p^{PS} \cdot \sum_{t \in T} (\Gamma_t \cdot X_{p,t}^{PS}) \quad \forall w \in W, d \in D_w, P \in P_d \quad (30)$$

$$SS^{Root} \leq Cap^{Root} \quad (31)$$

$$SS_w^{RW} \leq Cap_w^{RW} \quad \forall w \in W \quad (32)$$

$$SS_d^{LDC} \leq Cap_d^{LDC} \quad \forall w \in W, d \in D_w \quad (33)$$

$$SS_p^{PS} \leq Cap_p^{PS} \quad \forall w \in W, d \in D_w, P \in P_d \quad (34)$$

تابع هدف در (۱۴) حداقل‌سازی مجموع هزینه‌های نگهداری در تسهیلات را نشان می‌دهد. معادلات (۱۵) تا (۱۸) معادلات پنجره ریسک و سازوکار مدل خدمت‌دهی تضمین‌شده را نشان می‌دهند. همانطور که در مفروضات عنوان شد نقاط تقاضا بلافاصله خدمت ارائه می‌دهند ($S_p^{PS} = 0$) و انبار ریشه تأخیر ورودی ندارد ($S^{ext} = 0$). معادلات (۱۹) تا (۲۲) محدودیت‌های انتخاب بازه زمانی دودویی و معادلات (۲۳) تا (۲۶) متغیرهای پیوندی مرتبط با خطی‌سازی (پیوند L به متغیر دودویی X) را نشان می‌دهند. معادلات (۲۷) تا (۳۰) معادلات موجودی اطمینان و خطی‌سازی آن (جایگذاری ریشه دوم) را نشان می‌دهند. معادلات (۳۱) تا (۳۴) محدودیت‌های ظرفیت فیزیکی را نشان می‌دهد.

۳-۴-۱- الگوریتم جستجوی دوبخشی بیرونی

از آنجا که هدف نهایی حداکثر عدالت است و هزینه کل با توجه به سطح خدمت به‌طور یکنواخت افزایش می‌یابد، از جستجوی دوبخشی برای یافتن بالاترین سطح خدمت استفاده می‌شود. منطق الگوریتم به شرح زیر است:

گام ۱. تعریف حد پایین $z_{min} = 0$ (سطح خدمت ۰/۵۰، بدون موجودی اطمینان) و حد بالا $z_{max} = 4.0$ (سطح خدمت تقریبی ۰/۹۹/۹۹). تعیین تلورانس ε (مثلاً ۰/۰۰۵).

گام ۲. محاسبه مقدار $z_{test} = \frac{z_{min} + z_{max}}{2}$

۴- نتایج و بحث

برای اعتبارسنجی مدل پیشنهادی و ارزیابی کارایی آن، شبکه‌ای نماینده از شبکه واقعی انتخابات در ایران در نظر گرفته شد. این شبکه به‌گونه‌ای در نظر گرفته شده است که واقعیت‌های متنوع جمعیتی، جغرافیایی و زیرساختی شبکه انتخابات در ایران را بازنمایی کند. این شبکه از ۱ مرکز ریشه (چاپخانه بانک ملی)، ۳ انبار منطقه‌ای (به‌عنوان استان‌ها)، ۱۲ مرکز توزیع محلی (به‌عنوان شهرستان‌ها) و ۱۲۰ شعبه اخذ رأی (که در مجموعه‌های ۱۰ تایی به هر LDC تخصیص داده شده‌اند) تشکیل شده است. در ادامه، مفروضات شبکه ارائه شده است:

(۱) شبکه به‌صورت ساختار توزیع انتخابات در ایران است است (شکل ۱).

(۲) سه الگوی متمایز جغرافیایی و جمعیتی از طریق سه انبار منطقه‌ای متفاوت در نظر گرفته شده‌اند:

- استان تهران RW1: نمایانگر استانی پرجمعیت و متراکم، با فاصله‌های کوتاه میان گره‌های تقاضا و نزدیکی به چاپخانه مرکزی ریشه است.
- استان سیستان و بلوچستان RW2: نمایانگر استانی روستایی با پراکندگی جمعیتی زیاد و

فاصله‌های طولانی است و از نظر جغرافیایی دورترین فاصله را از مرکز ریشه دارد.

- استان اصفهان RW3: استانی است که ویژگی‌های دو استان قبلی را در حد تعادل دارد. این منطقه دارای تراکم جمعیتی متوسط و فاصله‌های حمل‌ونقل متوسط است.

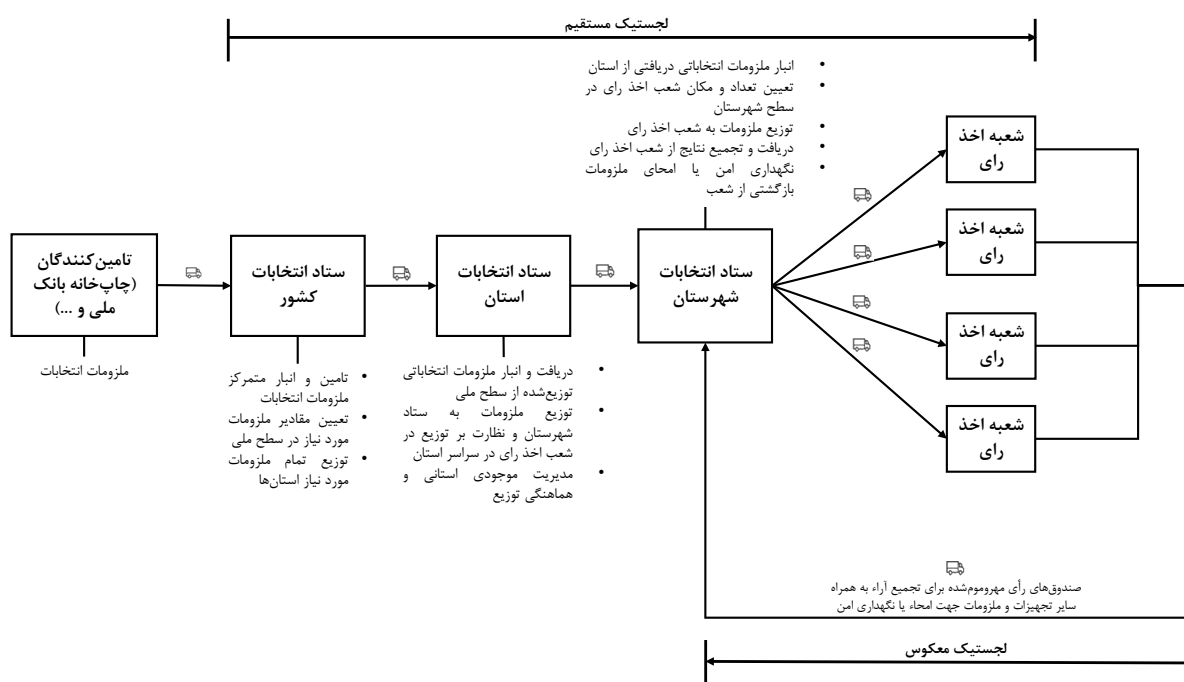
(۳) در هر استان نیز، شهرستان‌های متفاوتی در نظر گرفته شده‌اند (شهرستان‌ها با نماد LDC نشان داده شده‌اند).

- در استان تهران، شهر تهران به همراه ۳ شهرستان فیروزکوه، اسلامشهر و شهریار در نظر گرفته شده‌اند.

- در استان اصفهان، شهر اصفهان به همراه ۳ شهرستان آران و بیدگل، کاشان و شهرضا در نظر گرفته شده‌اند.

- در استان سیستان و بلوچستان ۴ شهرستان زابل، چابهار، ایرانشهر و زاهدان در نظر گرفته شده‌اند.

(۴) روز انتخابات ۱۶ ساعت و دوره‌های زمانی ۱ ساعته است.



شکل ۱. شبکه توزیع انتخابات در ایران (برگرفته از قوانین و مقررات مرتبط با انتخابات در ایران

("Presidential Electoral Law of Iran," 1985)).

Figure 1. The election distribution network in Iran (adapted from the laws and regulations related to elections in Iran ("Presidential Electoral Law of Iran," 1985)).

می‌دهد و R_i نرخ مشارکت تصادفی است که به صورت $R_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ تعریف شده است. (۷) پارامترهای توزیع از داده‌های تاریخی واقعی مشارکت استخراج شدند (SCI, 2023). میانگین این توزیع، نرخ مشارکت در انتخابات و واریانس آن، واریانس نرخ مشارکت در شهرستان‌ها (معادل LDC در مدل) است (جدول ۳). در نهایت این پارامترها در تعداد واجدین شرایط ضرب می‌شود.

جدول ۱. زمان‌های سفر از Root به RW (ساعت)

Table 1. Travel times from Root to RW (hour)

	RW3	RW2	RW1
Root	۴	۱۷	۱

جدول ۲. زمان‌های سفر از RW به LDC (ساعت)

Table 2. Travel times from RW to LDC (hour)

	LDC4	LDC3	LDC2	LDC1
RW1	۲	۲	۱	۱
	LDC8	LDC7	LDC6	LDC5
RW2	۳	۹	۴	۱
	LDC12	LDC11	LDC10	LDC9
RW3	۳	۳	۲	۱

جدول ۳. میانگین نرخ مشارکت تاریخی واقعی

Table 3. Mean actual historical voter turnout

	LDC4	LDC3	LDC2	LDC1	پارامتر	RW
	۰/۶۰۰	۰/۶۱۰	۰/۶۶۰	۰/۶۲۰	میانگین	RW1
	۰/۰۴۳	۰/۰۴۲	۰/۰۴۸	۰/۰۴۶	واریانس	
	۰/۵۰۰	۰/۵۲۰	۰/۵۳۰	۰/۵۳۰	میانگین	RW2
	۰/۰۴۳	۰/۰۳۵	۰/۰۴۰	۰/۰۳۲	واریانس	
	۰/۷۰۰	۰/۶۳۰	۰/۶۰	۰/۶۸۰	میانگین	RW3
	۰/۰۱۰	۰/۰۲۹	۰/۰۳۰	۰/۰۲۷	واریانس	

(۸) ۱۰۰ درصد از میانگین تقاضای مورد انتظار در شعب اخذ رای مستقر می‌شود. رأی‌دهندگان نباید برای تامین تقاضای پایه مورد انتظار منتظر حمل و نقل بمانند. بنابراین، تمام سطوح بالاتر در شبکه، صرفاً موجودی اطمینان نگهداری می‌کنند که برای مقابله با نوسانات تعیین شده است.

(۹) بر اساس داده‌های تاریخی مشارکت، همبستگی زوجی تقاضا بین دو گره i و k تحت پوشش مرکز توزیع محلی یکسان، منفی است ($\rho_{ik} < 0$). تقاضای انتخابات محدود به جمعیت رأی‌دهندگان ثبت‌شده

(۵) زمان‌های سفر میان گره‌ها مطابق داده‌های جغرافیای واقعی در نظر گرفته شده است که در جدول ۱ و جدول ۲ نشان داده شدند. همچنین زمان سفر از تامین‌کننده اصلی به گره Root، ۱ دوره زمانی است.

(۶) مشارکت رأی‌دهندگان به صورت متغیری تصادفی است که از توزیع نرمال پیروی می‌کند. عمل رأی‌دادن یک فرایند تصادفی دودویی است. هر فرد واجد شرایط یا در انتخابات شرکت می‌کند یا از آن خودداری می‌کند که معادل آزمون برنولی^۱ است. تعداد کل آرای مأخوذه در جمعیتی معین از توزیع دوجمله‌ای تبعیت می‌کند (Ross, 2014). در شعب اخذ رای، جمعیت واجدان شرایط رأی‌دهی نسبتاً بزرگ است. بر اساس قضیه حد مرکزی، هرچه n به اندازه کافی بزرگ شود، توزیع دوجمله‌ای به توزیع نرمال همگرا می‌شود (Fischer, 2011). در نتیجه، نرخ مشارکت در شعب اخذ رای (که به صورت نسبت کل آرای مأخوذه به کل جمعیت واجد شرایط محاسبه می‌شود) توسط منحنی نرمال با میانگین مشخص μ و واریانس σ^2 تقریب‌پذیر است. با این حال، در نظر گرفتن توزیع نرمال بر نرخ‌های نسبی در این زمینه می‌تواند مشکل ساز باشد که باید مورد توجه قرار گیرد. دامنه توزیع نرمال به صورت نامحدود از منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت است. در مقابل، نرخ مشارکت رأی‌دهی نسبتی است که بین ۰ و ۱ قرار دارد. اگر یک شعبه اخذ رای میانگین مشارکت تاریخی بالایی (برای مثال $\mu = 0.90$) داشته باشد و واریانس آن نیز زیاد باشد، ممکن است نرخ مشارکت بیش از ۱۰۰ درصد شود. برای رفع این نقض، از توزیع نرمال بریده‌شده^۲ استفاده شده است (Johnson, 1994). در نتیجه، با در نظر گرفتن متغیر تصادفی $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ مقدار قابل قبول برابر با $\max(0, \min(1, X))$ است. بر این اساس، تقاضای تصادفی (که بیانگر تعداد برگه‌های رای موردنیاز در شعبه i است) به صورت $D_i = E_i \times R_i$ تعریف می‌شود. در این رابطه، E_i پارامتری است که تعداد معلوم واجدان شرایط رأی‌دهی در شعبه i را نشان

^۱ Bernoulli trial

^۲ Truncated Normal Distribution

پروتنکل امنیتی افزایش می‌یابد. مرکز ریشه و انبارهای منطقه‌ای از صرفه‌های ناشی از مقیاس در امنیت برخوردار هستند.

۱۲) گره‌ها نمی‌توانند بیشتر از ظرفیت مجاز و امن موجودی نگهداری کنند. شعب اخذ رای اغلب مدارس یا مراکز اجتماعی هستند. آن‌ها فضای ذخیره‌سازی امن محدودی برای برگه‌های رای حساس دارند. مرکز توزیع محلی در مورد مطالعه این پژوهش فرمانداری‌ها هستند و یا ممکن است در دیگر کشورها از دفاتر شهرداری‌ها استفاده شود که هر دو ظرفیت محدودی دارند.

۱۳) محدودیت بودجه ۴۵۰,۰۰۰ واحد پولی است. ۱۴) شعب اخذ رای باید به رأی‌دهندگان به‌طور آنی خدمت‌رسانی کنند. بنابراین، تأخیر در خدمت‌رسانی خروجی آن‌ها صفر است. برعکس، انبار مرکزی یا گره ریشه، والدی ندارد، بنابراین، زمان انتظار ورودی آن صفر است.

۴-۱- یافته‌ها

مدل پیشنهادی با استفاده از حل‌کننده CBC در ۶ ثانیه اجرا شد. موارد زیر یافته‌های این پیاده‌سازی را نشان می‌دهد:

۱) با بودجه در نظر گرفته شده، سیستم به سطح خدمت چرخه‌ای ۹۹ درصد در تمامی گره‌های شبکه دست پیدا کرد. هزینه کل بهینه نگهداری موجودی برابر با ۴۴۹,۸۹۷ واحد پولی است که نشان می‌دهد الگوریتم دوبخشی، به‌طور مؤثر کل بودجه را برای حداکثرسازی سطح خدمت مصرف کرده است.

۲) تجمیع تقاضا از چندین مکان، نوسان نسبی آن تقاضا را کاهش داده است. به‌عنوان مثال، انحراف معیار تقاضا در LDC1 ($\sigma = 651.04$) از مجموع انحراف معیار تقاضا در شعب اخذ رای در زیر مجموعه LDC1 ($\sigma = 6501$) کمتر است (جدول ۴).

۳) رویکرد خطی‌سازی بدون نقص بوده و سطوح موجودی بهینه هستند. به‌عنوان مثال، موجودی اطمینان در گره‌های Root، RW1 و LDC1 را در نظر بگیرید (جدول ۴):

است. با این حال، تقاضاهای تجمیع‌شده در مراکز توزیع محلی متمایز و انبارهای منطقه‌ای متمایز، از نظر آماری مستقل از یکدیگرند. در نتیجه، ضریب همبستگی بین هر دو مرکز توزیع محلی یا انبار منطقه‌ای متمایز، صفر فرض می‌شود. نوسانات تصادفی در مرکز توزیع محلی به‌طور علی بر نوسانات تصادفی در مرکز توزیع محلی دیگر (که از نظر جغرافیایی متمایز است)، تأثیر نمی‌گذارد. با در نظر گرفتن همبستگی منفی بین شعب و محاسبه واریانس تجمیع‌شده در سطوح بالادست، نیازی به تعریف متغیرهای همبستگی در مدل وجود ندارد. همانطور که پیش از این مطرح شد، واریانس گره والد صرفاً مجموع واریانس‌های گره‌های فرزند نیست. این واریانس شامل کوواریانس میان آن‌ها نیز می‌شود که همان اثر تجمیع ریسک است (Zipkin, 2000):

$$\sigma_{LDC}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \rho_{ik} \sigma_i \sigma_k \quad (35)$$

۱۰) برای محاسبه واریانس در گره‌های بالادستی، به ماتریس کوواریانس برای شبکه‌ای از ۱۲۰ شعبه اخذ رای نیاز است. این ماتریس کوواریانس ۱۲۰ در ۱۲۰ درایه منحصر به فرد خواهد داشت. از آنجا که تعیین ۱۴,۴۰۰ زوج کوواریانس متمایز از نظر محاسباتی طولانی است، در عوض از ماتریس همبستگی بلوکی-قطری استفاده شده است.

الف) ضریب همبستگی $\rho_{i,j}$ میان هر دو شعبه رأی i و j به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

- اگر $i = j$ باشد، $\rho_{i,j} = 1.0$.
- اگر $i \neq j$ باشد و هر دو شعبه اخذ رأی i و j به LDC مشترک تعلق داشته باشند، $\rho_{i,j} = -0.1$.

- اگر $i \neq j$ باشد و هر دو شعبه اخذ رأی i و j به LDC مشترک تعلق نداشته باشند، $\rho_{i,j} = 0.0$.

ب) برای مراکز توزیع محلی در RW مشترک: $\rho = 0$ است.

ج) ضریب همبستگی بین انبارهای منطقه‌ای صفر است $\rho = 0$.

۱۱) هزینه‌های نگهداری موجودی با جابه‌جایی به سطوح پایین به دلیل هزینه‌های انبارداری غیرمتمرکز و

(۴) زمان خدمت در تمامی گره‌ها به‌جز گره RW2 صفر است. دلیل این امر آن است که نگهداری موجودی در سطوح بالای زنجیره کم‌هزینه‌تر است. منطق مدل این است که تا حد امکان از نگهداری موجودی در سطوح پایین‌دست اجتناب کند. اگر زمان خدمت برای گره والدی مثل RW بزرگ‌تر از صفر باشد، ارسال محموله به LDC را به تأخیر می‌اندازد. این تأخیر مقدار L را برای تمامی LDCهای پایین‌دستی افزایش می‌دهد. از آنجا که LDCها اکنون با پنجره ریسک طولانی‌تری مواجه هستند، ناچارند موجودی اطمینان بیشتری نگهداری کنند. در نتیجه، بهینه‌ساز سعی می‌کند S را در تمامی گره‌ها صفر کند تا نگهداری موجودی به بالادست منتقل شود. اما در خصوص گره RW2 که نماینده استان سیستان و بلوچستان است، فاصله زیادی تا انبار مرکزی دارد (۱۷ دوره). همچنین حداکثر بازه زمانی مجاز برابر با ۱۶ است. حل‌کننده باید پنجره ریسک را برای RW2 به‌صورت زیر محاسبه کند:

$$L_2^{RW} = S^{Root} + t_2^{RW} - S_2^{RW} = 0 + 17 - S_2^{RW} \quad (39)$$

از آنجایی که حداکثر مقدار L برابر با T_{max} است، حل‌کننده نمی‌تواند S_2^{RW} را برابر با صفر قرار دهد. برای آنکه $L \leq 16$ ممکن باشد، حل‌کننده ناچار است مقدار S_2^{RW} را حداقل برابر با ۱ قرار دهد ($16 - 1 = 15$). از آنجا که S باید کوچک باشد تا از LDCها محافظت شود، مقدار ۱ انتخاب می‌شود. به‌دلیل این زمان تامین بالا، RW2 مجبور است ۱۳۸۸ واحد موجودی اطمینان نگهداری کند که هزینه‌ای معادل ۶۹۴ واحد پولی دارد. مقایسه این مقدار با RW1 که دارای $L = 1$ و هزینه ۴۷۵ واحد پولی است، نشان می‌دهد در مقایسه با استان‌های با فاصله کوتاه، این استان، علی‌رغم جمعیت کمتر، هزینه بیشتری دارد.

(۵) شکل ۲ نشان می‌دهد بیشتر موجودی اطمینان در سطح شعب اخذ رای مستقر است.

(۶) مجموع موجودی سطح در استان‌ها نشان می‌دهد، مدل تا جای ممکن موجودی اطمینان بیشتری را در مناطق دورتر مثل RW2، در نظر می‌گیرد و در عوض در مناطقی که امکان ارسال ثانویه موجودی در زمان

$$SS^{Root} = z \times \sigma_{day,n} \times \sqrt{L/T_{day}} \quad (36)$$

$$= 2.9219 \times 1668.48 \times \sqrt{1/16} = 1218$$

$$SS_1^{RW} = 2.9219 \times 1301.57 \times \sqrt{1/16} = 950 \quad (37)$$

$$SS_1^{LDC} = 2.9219 \times 651.04 \times \sqrt{1/16} = 475 \quad (38)$$

که با مقادیر خروجی جدول ۴ برابر هستند.

جدول ۴. خروجی حل‌کننده برای گره‌های سطوح بالاتر و ۱۰ شعبه اخذ رای اول

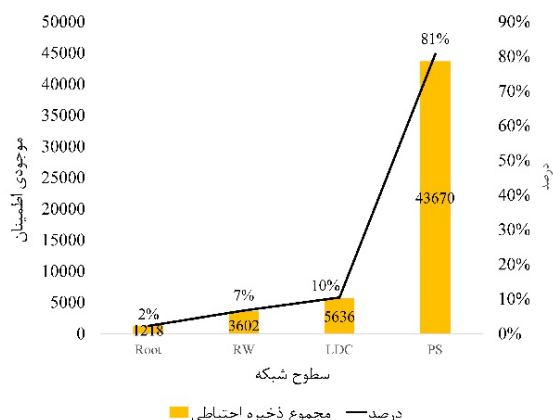
Table 4. Solver output for higher echelon nodes and the first 10 polling stations

گره	σ	t	S	L	SS	هزینه
Root	۱۶۶۸	۱	۰	۱	۱۲۱۸	۱۲۱
RW1	۱۳۰۱	۱	۰	۱	۹۵۰	۴۷۵
RW2	۴۳۲	۱۷	۱	۱۶	۱۲۶۳	۶۳۱
RW3	۹۵۰	۴	۰	۴	۱۳۸۸	۶۹۴
LDC1	۶۵۱	۱	۰	۱	۴۷۵	۹۵۱
LDC2	۶۴۶	۱	۰	۱	۴۷۲	۹۴۴
LDC3	۶۲۴	۲	۰	۲	۶۴۵	۱۲۹۱
LDC4	۶۷۹	۲	۰	۲	۷۰۲	۱۴۰۴
LDC5	۲۳۴	۱	۰	۲	۲۴۱	۴۸۴
LDC6	۱۹۹	۴	۰	۵	۳۲۵	۶۵۰
LDC7	۲۱۲	۹	۰	۱۰	۴۹۱	۹۸۳
LDC8	۲۱۷	۳	۰	۴	۳۱۷	۶۳۵
LDC10	۵۳۰	۲	۰	۲	۵۴۷	۱۰۹۵
LDC11	۵۲۷	۳	۰	۳	۶۶۷	۱۳۳۵
LDC12	۳۰۲	۳	۰	۳	۳۸۲	۷۶۵
LDC9	۵۰۱	۱	۰	۱	۳۶۶	۷۳۳
PS1	۶۵۰	۱	۰	۱	۴۷۵	۴۷۵۴
PS2	۶۴۱	۱	۰	۱	۴۶۸	۴۶۸۴
PS3	۶۵۳	۱	۰	۱	۴۷۷	۴۷۷۱
PS4	۶۶۶	۱	۰	۱	۴۸۶	۴۸۶۶
PS5	۶۴۰	۱	۰	۱	۴۶۷	۴۶۷۴
PS6	۶۴۰	۱	۰	۱	۴۶۷	۴۶۷۴
PS7	۶۶۷	۱	۰	۱	۴۸۷	۴۸۷۳
PS8	۶۵۵	۱	۰	۱	۴۷۸	۴۷۸۴
PS9	۶۳۶	۱	۰	۱	۴۶۴	۴۶۴۸
PS10	۶۵۱	۱	۰	۱	۴۷۶	۴۷۵۹

اطمینان نگهداری شده در مرکز توزیع محلی با دورتر شدن شعب کاهش می‌یابد. این امر نشان می‌دهد که مدل بار موجودی را به سمت شعب اخذ رای دورتر نسبت به مرکز توزیع محلی منتقل می‌کند.

(۷) **شکل ۴** مرز کارای بودجه - برابری را نشان می‌دهد.

توزیع موجودی اطمینان در سطوح شبکه



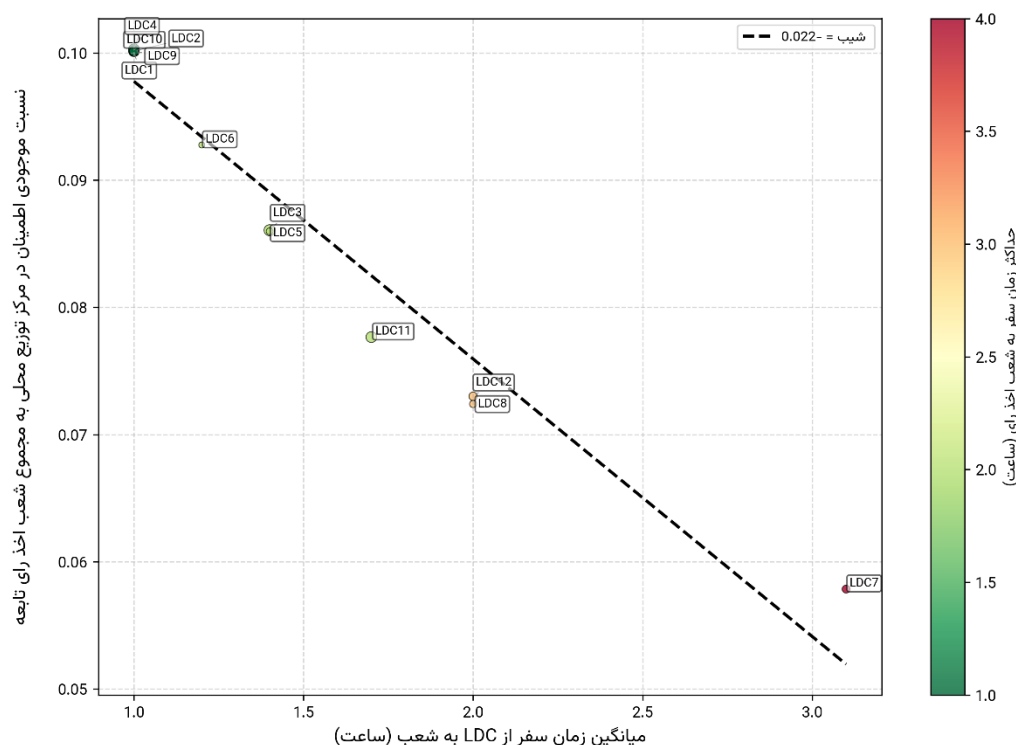
شکل ۲. مجموع موجودی اطمینان در سطوح مختلف.

Figure 2. Total safety stock at different echelons of the network.

سریع‌تری وجود دارد، موجودی اطمینان را در سطح LDC و یا RW جمع می‌کند.

حال این پرسش مطرح است که فاصله میان شعب اخذ رای و مراکز توزیع محلی چه تاثیری بر کارایی جمع ریسک دارد؟ در واقع، اگر دو مرکز توزیع محلی از هر نظر به جز فاصله تا شعب اخذ رای یکسان بودند، آیا مرکز توزیع محلی با شعب دورتر، سهم کمتری از کل موجودی اطمینان را نسبت به مرکز توزیع محلی دیگر در اختیار خواهد داشت؟

برای پاسخ به این سوال باید در نظر داشت در داده‌های شبکه انتخابات، مراکز توزیع محلی که فواصل پایین‌دستی طولانی‌تری دارند معمولاً زمان‌های تامین بالادستی طولانی‌تری نیز دارند. از این رو، برای نشان دادن تأثیر خالص فاصله پایین‌دستی، نسبت جمع ریسک با اختصاص زمان تامین بالادستی یکسان به تمام مراکز توزیع محلی مورد ارزیابی قرار گرفت. **شکل ۳** نسبت جمع حاصل با فرض ثبات سایر شرایط به‌عنوان تابعی از میانگین زمان سفر از مرکز توزیع محلی به شعب اخذ رای نشان داده شده است. شیب منفی آن نشان می‌دهد که پس از کنترل تأخیرهای بالادستی، سهم موجودی



شکل ۳. اثر خالص فاصله پایین‌دست بر نسبت جمع ریسک با در نظر گرفتن زمان تامین یکسان در LDC.

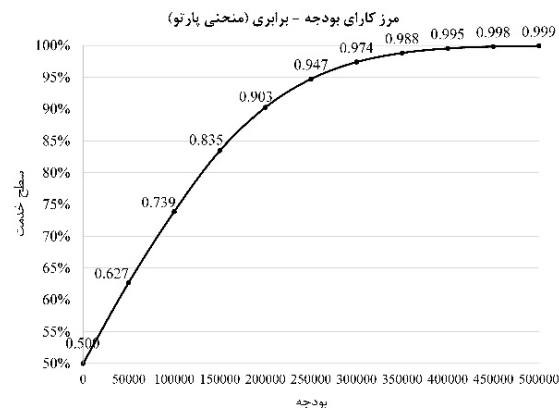
Figure 3. The net effect of downstream distance on the risk pooling ratio considering the same supply time in LDC.

رویکرد مبتنی بر حداکثرسازی میانگین کارایی بر این اصل استوار است که منابع در جایی تخصیص یابند که با کمترین هزینه، بیشترین بهبود در سطح خدمت حاصل شود. بنابراین، بودجه موجود عمدتاً به شعبی اختصاص می‌یابد که ارتقای سطح خدمت در آن‌ها کم‌هزینه‌تر است؛ به‌طوری‌که سطح خدمت این شعب به حداکثر مقدار خود ($z=4$) می‌رسد، در حالی که شعب دورافتاده و پرهزینه ممکن است هیچ‌گونه بهبودی دریافت نکنند ($z=0$). این تفاوت نشان می‌دهد که دستیابی به عدالت مستلزم چشم‌پوشی از بخشی از کارایی متوسط سیستم است.

حال می‌توان قیمت عدالت را به دو شکل محاسبه کرد: الف) محاسبه بر مبنای هزینه فرصت؛ ب) محاسبه بر مبنای پولی.

الف) محاسبه بر مبنای هزینه فرصت: برای کمی‌سازی اثر تابع هدف عدالت‌محوری، قیمت عدالت تحت بودجه ثابت ۴۵۰,۰۰۰ محاسبه شد. اگر سیستم به‌دنبال حداکثرسازی میانگین سطح خدمت باشد به میانگین ضریب ایمنی $z=3.3$ دست پیدا می‌کند. در مقابل، رویکرد حداکثرسازی حداقل عدالت تضمین می‌کند که هیچ مکانی سطح خدمت پایین‌تر از $z=2.9219$ نداشته باشد. بنابراین، قیمت عدالت یا هزینه فرصت تضمین دسترسی برابر رأی‌دهندگان معادل کاهش ۰/۳۷ واحدی در ضریب ایمنی متوسط کل سیستم است. **جدول ۵** نتیجه این مقایسه را نشان می‌دهد.

ب) محاسبه بر مبنای پولی: برای کمی‌سازی قیمت عدالت بر مبنای پولی، مقدار z برابر با ۲/۹۲۱۹ (سطحی که توسط مدل عدالت‌محور به‌دست آمده است) ثابت در نظر گرفته شد و حداقل هزینه مطلق لازم برای دستیابی به سطح خدمت متوسط ۲/۹۲۱۹ در میان همه شعب اخذ رأی بدست آمد. مدل کارا توانست این میانگین سراسری سیستم را با هزینه ۳۶۸,۱۲۵ محقق کند و در مقایسه با بودجه ۴۵۰,۰۰۰ واحد پولی مدل عدالت‌محور، به‌اندازه ۸۱,۸۷۵ واحد پولی صرفه‌جویی داشته باشد. این صرفه‌جویی از طریق عدم تخصیص موجودی اطمینان به شعب اخذ رأی پرهزینه ($z=0$) و تخصیص بیش از حد به شعب شهری کم‌هزینه ($z=4$) حاصل شده است. **جدول ۵** نتیجه این مقایسه را نشان می‌دهد.



شکل ۴. مرز کارایی بودجه - برابری.

Figure 4. Budget – Equality efficiency Frontier.

کمترین مقدار حالتی است که بودجه‌ای برای موجودی اطمینان در نظر گرفته نشود. در این وضعیت، هر گره صرفاً موجودی‌ای معادل با تقاضای مورد انتظار در طول زمان تامین خود نگهداری می‌کند. نگهداری موجودی در سطح میانگین، منجر به ضریب ایمنی ۰ می‌شود که متناظر با سطح خدمت ۵۰ درصد است. در نبود هرگونه بودجه برای موجودی اطمینان، هر شعبه اخذ رأی با احتمالی معادل ۵۰ درصد از بروز کمبود موجودی مصون است. هر واحد پولی افزوده‌شده به بودجه، بهبودهای تدریجی فراتر از این مبنای ۵۰ درصدی ایجاد می‌کند. افزایش بودجه از ۴۵۰,۰۰۰ واحد پولی تغییر قابل ملاحظه‌ای در سطح خدمت ایجاد نمی‌کند، از این رو، این نقطه، سطح خدمت مطلوبی را در برابر بودجه ارائه می‌کند.

۸) قیمت عدالت^۱ برای مدل به‌کار گرفته شده چقدر است؟ به‌عبارت دیگر، برای تضمین اینکه یک رأی‌دهنده در روستایی دورافتاده همان تجربه رای دادن را در شهر پایتخت داشته باشد، چه میزان کارایی کلی سیستم کاهش می‌یابد؟

برای نشان دادن هزینه تحقق عدالت، رویکرد پیشنهادی با رویکردی سودمحور مقایسه می‌شود که هدف آن حداکثرسازی میانگین کارایی است. در مدل حاضر، تا زمانی که بودجه کافی برای ارتقای سطح خدمت دورافتاده‌ترین و پرهزینه‌ترین شعبه وجود نداشته باشد، افزایش سطح خدمت شعب شهری و کم‌هزینه نیز مجاز نیست. در نتیجه، این مدل به‌دنبال برقراری سطحی برابر از خدمت در تمامی شعب اخذ رأی است. در مقابل،

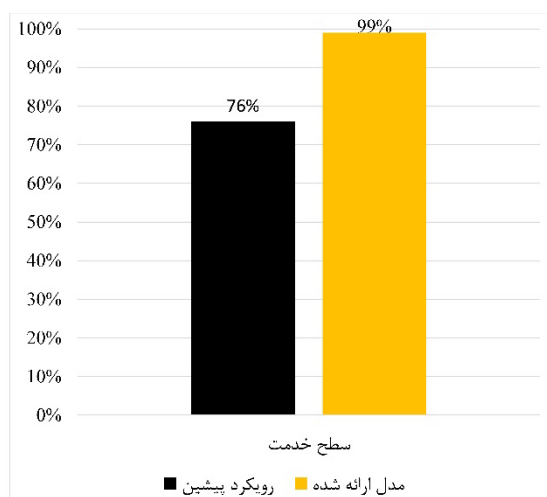
¹ Price of Fairness

جدول ۵. مقایسه مقادیر z برای دو رویکرد عدالت‌محوری و سودمحوری بر مبنای هزینه فرصت و مبنای پولی

Table 5. Comparison of z values for two approaches: equity-based and profit-based, based on opportunity cost and monetary basis

مبنای قیمت عدالت	معیار	رویکرد عدالت‌محوری	رویکرد سودمحوری
محاسبه بر مبنای هزینه فرصت	میانگین z	۲/۹۲۱۹	۳/۳۳۸۱
	حداقل z	۲/۹۲۱۹	۰
	حداکثر z	۲/۹۲۱۹	۴
محاسبه بر مبنای پولی برای سطح خدمت ۲/۹۲۱۹	هزینه	۴۴۹۰۸۹۷	۱۲۵۰۳۶۸

بودجه است و ظرفیت نگهداری نقشی در محدود کردن پاسخ مدل ندارد.



شکل ۵. مقایسه سطح خدمت در دو سناریو.

Figure 5. Comparing service levels in two scenarios.

جدول ۶. حساسیت نسبت به ظرفیت نگهداری شعب

Table 6. Sensitivity to polling-station capacity

S_5^{LDC}	SS_2^{RW}	SS_5^{LDC}	z	Cap_5^{PS}
۰	۱۲۶۳	۲۴۱	۲/۹۲۱۹	۱۰۰۰
۰	۱۲۶۳	۲۴۱	۲/۹۲۱۹	۷۰۰
۰	۱۲۶۳	۲۴۱	۲/۹۲۱۹	۵۰۰
۰	۱۲۶۳	۲۴۱	۲/۹۲۱۹	۳۰۰
۰	۵۰۸	۹۷	۱/۱۷۵۸	۱۰۰

با کاهش بیشتر ظرفیت، مدل همچنان شدنی باقی می‌ماند، اما مقدار z تا بیشترین مقدار سازگار با محدودیت‌های ظرفیت کاهش می‌یابد. در نتیجه، با رسیدن ظرفیت به ۱۰۰، مقدار z به ۱/۱۷۵۸ واحد کاهش یافته و موجودی اطمینان شعب نیز متناسب با آن کاهش می‌یابد. همچنین کاهش موجودی اطمینان LDC_5 و RW_2 در ظرفیت ۱۰۰، نتیجه کاهش z است و نه نشانه‌ای از عدم انتقال موجودی به بالادست. در تمامی موارد،

۹) چه تفاوتی میان رویکرد پیشنهادی این پژوهش و رویه متداول مدیران انتخابات در تخصیص موجودی وجود دارد؟

در رویه متداول مدیریت انتخابات، موجودی هر شعبه اخذ رأی متناسب با تعداد افراد واجد شرایط آن شعبه تخصیص داده می‌شود. علاوه بر این، در صورت وجود منابع مالی کافی، حاشیه اطمینانی معادل ۱۰ درصد نیز برای پوشش نوسانات احتمالی تقاضا در نظر گرفته می‌شود. این رویکرد بدون توجه به تفاوت‌های موجود در میزان عدم قطعیت تقاضا و قابلیت تجمیع ریسک میان شعب، موجودی را به صورت نسبتاً یکنواخت توزیع می‌کند. نتایج حاصل از اجرای این سناریو در **شکل ۵** ارائه شده است. مطابق نتایج، با بودجه ۴۵۰,۰۰۰ واحدی، رویکرد متداول تنها قادر به دستیابی به ضریب ایمنی ۱/۱۸، معادل سطح خدمت ۷۶ درصد، بوده است. در مقابل، مدل پیشنهادی این پژوهش با بهره‌گیری از تجمیع ریسک و تخصیص بهینه موجودی، توانسته است ضریب ایمنی ۲/۹۲۱۹، معادل سطح خدمت ۹۹ درصد، را محقق سازد. این نتایج نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی، بدون افزایش بودجه، سطح خدمت را حدود ۳۰ درصد بهبود داده و به طور قابل توجهی کارایی تخصیص منابع انتخاباتی را افزایش می‌دهد.

۱۰) برای تحلیل حساسیت مدل نسبت به ظرفیت نگهداری، ده شعبه تحت پوشش مرکز توزیع محلی پنجم (LDC_5) ذیل RW_2 به عنوان نمونه انتخاب شدند. سپس، با ثابت نگه داشتن بودجه، ظرفیت هر شعبه به تدریج از ۱۰۰۰ به ۱۰۰ کاهش یافت. نتایج **جدول ۶** نشان می‌دهد تا زمانی که ظرفیت هر شعبه حداقل ۳۰۰ باشد، مقدار بهینه ضریب ایمنی یکنواخت z بدون تغییر و برابر با ۲/۹۲۱۹ باقی می‌ماند، زیرا در این محدوده، عامل محدود کننده

مقیاس‌پذیری مناسب روش پیشنهادی است. از آنجا که استقرار موجودی اطمینان پیش از روز انتخابات انجام می‌شود، این زمان حل برای ابعاد واقعی در سطح ملی قابل قبول است و کارایی محاسباتی رویکرد پیشنهادی را تایید می‌کند.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک مدل خدمت‌دهی تضمین‌شده برای استقرار راهبردی موجودی اطمینان در شبکه‌های توزیع چندسطحی ارائه شد که در آن، به‌جای حداقل‌سازی هزینه برای سطح خدمتی از پیش تعیین‌شده، هدف، حداکثرسازی حداقل سطح خدمت در میان تمام گره‌های تقاضا، تحت محدودیت بودجه و ظرفیت است. این تغییر در رویکرد مدل‌سازی، امکان به‌کارگیری آن را در مسائلی فراهم می‌کند که در آن‌ها رعایت عدالت و برابری در ارائه خدمت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

در سطح اجرایی، پیاده‌سازی مدل بر روی شبکه‌ی انتخابات، ناکارآمدی رویه‌های تجربی رایج را آشکار ساخت. بهبود ۲۳ درصدی در سطح خدمت، نشان‌دهنده‌ی ظرفیت بالای بهینه‌سازی سیستماتیک در مقایسه با قواعد سرانگشتی است. همچنین، تحلیل‌ها نشان می‌دهد که افزایش فاصله میان مراکز توزیع محلی و نقاط تقاضا، کارایی تجمیع ریسک را کاهش داده و بخش بیشتری از موجودی اطمینان را به سطوح پایین‌دست شبکه منتقل می‌کند. این نتایج می‌تواند به مدیران اجرایی کمک کند تا پیش از برگزاری انتخابات، نقاط آسیب‌پذیر شبکه را شناسایی کرده و برای تامین مناسب آن‌ها برنامه‌ریزی کنند.

این چارچوب قابلیت تعمیم به حوزه‌های دیگری نظیر توزیع کمک‌های بشردوستانه، واکسیناسیون و شبکه‌های تامین اضطراری را دارد. مطالعات آینده می‌توانند قابلیت کاربردی مدل را افزایش دهند. مدل حاضر زمان‌های جابه‌جایی را قطعی فرض کرده است که می‌توان زمان‌های تامین تصادفی، اختلال‌های زیرساختی یا تأخیرهای ناشی از شرایط جوی را نیز در نظر گرفت. همچنین، این پژوهش به استقرار راهبردی موجودی پیش از روز انتخابات پرداخته است و گام بعدی می‌تواند بازتوزیع اضطراری در ساعات رأی‌گیری باشد.

انتقال بالادست برای z متناظر، حداکثر مقدار ممکن است. دلیل این امر آن است که در تمامی سناریوهای بررسی‌شده، $S_5^{LDC} = 0$ باقی می‌ماند. در چارچوب GSM، زمان خدمت صفر مرکز توزیع محلی به معنای آن است که آن مرکز متعهد می‌شود در سریع‌ترین زمان ممکن (بلافاصله پس از دریافت تقاضا) به شعب خود خدمت‌رسانی کند. این کار پنجره ریسک شعب را به حداقل رسانده و موجودی اطمینان را به حداکثر ممکن در گره والد و سطوح بالاتر منتقل می‌کند. بنابراین، مقدار $S_5^{LDC} = 0$ نشان می‌دهد که مدل از پیش، حداکثر انتقال موجودی به بالادست را انجام داده و دیگر امکانی برای انتقال بیشتر از این طریق وجود ندارد. در نتیجه، موجودی اطمینان $LDC5$ و $RW2$ برای ضریب ایمنی z در بیشترین مقدار ممکن قرار دارد. این رفتار با فرض بنیادین مدل GSM سازگار است. موجودی اطمینان برای تضمین تقاضا تا کران تعیین‌شده توسط z کافی است و تقاضای فراتر از آن، مطابق رویه استاندارد این چارچوب، از طریق اقدامات فوق‌العاده (مانند تأمین اضطراری یا چاپ مجدد برگه‌های رأی) پاسخ داده می‌شود (Snyder & Shen, 2019). بنابراین، کاهش یکنواخت z در اثر محدودیت ظرفیت، بیانگر تعدیل سطح خدمت تضمینی متناسب با محدودیت‌های فیزیکی شبکه است و نه ناکارآمدی سیاست تخصیص موجودی. مدل پیش از آنکه سطح خدمت را کاهش دهد، از تمامی انعطاف‌پذیری عملیاتی موجود بهره گرفته است.

۱۱) به‌منظور ارزیابی مقیاس‌پذیری و کارایی محاسباتی روش پیشنهادی، مجموعه‌ای از شبکه‌ها با ابعاد مختلف در نظر گرفته شد. مدل برای هر شبکه با الگوریتم کامل دوبخشی و با فرض نامحدود بودن بودجه و ظرفیت‌های نگهداری حل شد تا تنها عامل مؤثر بر زمان حل، ابعاد مسئله باشد. نتایج در **جدول ۷** ارائه شده است.

در تمامی ابعاد، الگوریتم دوبخشی در ۱۰ تکرار همگرا شد که با توجه به نامحدود بودن بودجه و دستیابی به ضریب ایمنی $4/0$ و تلورانس $0/005$ ، مورد انتظار است ($\log_2(4.0/0.005) \approx 10$). بنابراین، زمان حل کل تقریباً معادل ۱۰ برابر میانگین زمان حل مدل MILP است. همچنین، زمان حل با افزایش ابعاد شبکه متناسب با تعداد متغیرهای دودویی رشد می‌کند که نشان‌دهنده

جدول ۷. تحلیل مقیاس‌پذیری روش حل پیشنهادی برای ابعاد مختلف شبکه

Table 7. Scalability of the proposed solution method for different network sizes

تعداد شعب	تعداد گره‌ها	تعداد متغیرهای دودویی	تعداد تکرارها	زمان حل (ثانیه)
۱۲۰	۱۳۶	۲۳۱۲	۱۰	۶/۱۵
۲۴۰	۲۶۸	۴۵۵۶	۱۰	۸/۵۹
۴۸۰	۵۳۲	۹۰۴۴	۱۰	۱۷/۲۵
۹۶۰	۱۰۶۰	۱۸۰۲۰	۱۰	۳۸/۲۲
۱۹۲۰	۲۱۱۶	۳۵۹۷۲	۱۰	۷۹/۳۶

ACE. (2025b). Voting Operations —. <https://aceproject.org/ace-en/topics/vo/onePage>.

Achkar, V. G., Brunaud, B. B., Musa, R., & Grossmann, I. E. (2024). Efficient computational strategies for a mathematical programming model for multi-echelon inventory optimization based on the guaranteed-service approach. *Computers & Chemical Engineering*, 182. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2023.108567>.

Achkar, V. G., Brunaud, B. B., Perez, H. D., Musa, R., Mendez, C. A., & Grossmann, I. E. (2023). Extensions to the guaranteed service model for industrial applications of multi-echelon inventory optimization. *European Journal of Operational Research*, 313, 192–206. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.08.013>.

Ana. (2021). *We are following up on complaints about the lack of ballots*. <https://ana.ir/fa/news/589060> (In Persian)

Angelus, A., & Song, J.-S. J. (2023). Research Handbook on Inventory Management. In *Chapter 4: Generalizations of the Clark–Scarf model and analysis* (pp. 73–98). Edward Elgar Publishing. <https://doi.org/10.4337/9781800377103.00011>

Aouam, T., Ghadimi, F., & Vanhoucke, M. (2021). Finite inventory budgets in production capacity and safety stock placement under the guaranteed service approach. *Computers & Operations Research*, 131, 105266. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105266>.

Axsäter, S. (2015). *Inventory Control*. Springer International Publishing. https://books.google.com/books?id=2eb5rQEA_CAAJ.

Bendadou, A., Kalai, R., Jemai, Z., & Rekik, Y. (2021). Impact of merging activities in a supply chain under the Guaranteed Service Model: Centralized and decentralized cases. *Applied Mathematical Modelling*, 93, 509–524. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.12.024>.

Bendadou, A., Rekik, Y., Kalaï, R., & Jemai, Z. (2025). A guaranteed service model with continuous review (r,Q) policy. *Annals of Operations*

مشارکت‌های نویسندگان

شهرام علی‌یاری: مفهوم‌پردازی، روش‌شناسی، مرور ادبیات، جمع‌آوری داده‌ها، تحلیل صوری، طراحی چارچوب، نگارش پیش‌نویس اولیه، بازنگری و ویرایش، راهنمایی؛ میلاد هاشمی: روش‌شناسی، مرور ادبیات، جمع‌آوری داده‌ها، تحلیل صوری، طراحی چارچوب، نگارش پیش‌نویس اولیه، بازنگری و ویرایش؛ ابراهیم تیموری: روش‌شناسی، طراحی چارچوب، راهنمایی، مفهوم‌پردازی اولیه، جمع‌آوری داده‌ها، نگارش پیش‌نویس اولیه.

تأمین مالی

این پژوهش هیچ‌گونه حمایت مالی خارجی دریافت نکرده است.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ‌گونه تضاد منافع مرتبط با تحقیق حاضر ندارند و نتایج به‌صورت بی‌طرفانه و بدون دخالت منافع شخصی یا حرفه‌ای به‌دست‌آمده است.

قدردانی

نویسندگان از عوامل اجرایی نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری و همچنین داوران محترم که کیفیت این مقاله را افزایش دادند، قدردانی می‌کنند.

مراجع

ACE. (2025a). Voter Registration. <https://aceproject.org/main/english/vr/vrd.htm>.

- Theory. Springer Science & Business Media. <https://books.google.com/books?id=v7kTwaffiPsC>.
- Gheisari, N., Taheri, D. F., & Bagheri, M. F. (2015). Administration Body Election in Iran, Quality and that Assessment of Performance. *Journal of Strategic Policy Research*, 4(13), 9–34. (In Persian). <https://www.sid.ir/paper/256124/en>
- Graves, S., & Willems, S. (2000). Optimizing Strategic Safety Stock Placement in Supply Chains. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2, 68–83. <https://doi.org/10.1287/msom.2.1.68.23267>.
- Hoye, R., Smith, A. C. T., Nicholson, M., & Stewart, B. (2015). *Sport Management: Principles and Applications*. Taylor & Francis. <https://books.google.com/books?id=KL8cBgAAQBAJ>.
- IDEA, I. (2014). *Electoral Management Design: Electoral Management Design*. International IDEA, Institute for Democracy and Electoral Assistance. <https://books.google.com/books?id=ijTYEAAAQBAJ>.
- IFES. (2022). Introduction to Operational Planning: A Guide for Election Management Bodies. In: IFES. <https://www.ifes.org/publications/introduction-to-operational-planning-guide-election-management-bodies>.
- Inderfurth, K. (1991). Safety stock optimization in multi-stage inventory systems. *International Journal of Production Economics*, 24(1), 103–113. [https://doi.org/10.1016/0925-5273\(91\)90157-O](https://doi.org/10.1016/0925-5273(91)90157-O).
- Iwuoha, V., Anichebe, J., Obi, K., Alumona, I., Ojimba, A., & Obiorji, J. (2021). Election Logistics and Political Meddling: Rethinking the Use of 'Town Service' Buses in Transporting Election Materials in Nigeria. *Society*, 58, 1–12. <https://doi.org/10.1007/s12115-021-00577-9>.
- Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions* (2 ed., Vol. 1). John Wiley & Sons. <https://books.google.com/fj/books?id=BTANEAQAQBAJ>.
- Kamp, D., & Rambau, J. (2022). Flow Formulation of Demand Propagation in Guaranteed Service Models. *IFAC-PapersOnLine*, 55(20), 505–510. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.145>.
- Khoshnami, S., & Mashayekhi, E. (2026). Multi-objective modeling for cost management in optimal allocation of relief supplies in crisis conditions. *System Engineering and Productivity*, 6(2), 283–314. (In Persian). <https://doi.org/10.22034/sep.2025.2075536.1416>
- Klosterhalfen, S., & Minner, S. (2010). Safety stock optimisation in distribution systems: a comparison of two competing approaches. *Research*, 351(1), 883–901. <https://doi.org/10.1007/s10479-025-06550-7>.
- CarterCenter. (2023). *Election Obligations And Standards* (2 ed.). the Carter Center. <https://reliefweb.int/report/world/election-obligations-and-standards-carter-center-assessment-manual-second-edition>.
- Chamani, C., Van Gheluwe, C., & Aghezzaf, E.-H. (2022). Joint optimization of safety stock placement and supplier selection in a multi-layered distribution network. *IFAC-PapersOnLine*, 55(10), 2515–2520. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.087>.
- Charles, M., Ndolo, J., & Odari, S. (2023). Inventory management practices and performance of electoral systems in Kenya. *International Journal of Social Science and Humanities Research*, 1(1) 811–826. <https://doi.org/10.61108/ijsshr.v1i1.64>.
- Claassen, R. L., Magleby, D. B., Monson, J. Q., & Patterson, K. D. (2008). "At Your Service": Voter Evaluations of Poll Worker Performance. *American Politics Research*, 36(4), 612–634. <https://doi.org/10.1177/1532673X08319006>.
- Clark, A. J., & Scarf, H. (1960). Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem. *Management Science*, 6(4), 475–490. <https://doi.org/10.1287/mnsc.6.4.475>.
- Debrah, E., Effah, J., & Owusu-Mensah, I. (2019). Does the use of a biometric system guarantee an acceptable election's outcome? Evidence from Ghana's 2012 election. *African Studies*, 78(3), 347–369. <https://doi.org/10.1080/00020184.2018.1519335>.
- Duc, N. T. T., Tai, P. D., & Buddhakulsomsiri, J. (2022). Inventory Positioning in Supply Chain Network: A Service-Oriented Approach. *IEEE Access*, 10, 92986–93002. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3202906>.
- Election Assistance Commission. United States. (2023). *Election Management Guidelines*. Election Assistance Commission. <https://www.eac.gov/election-officials/election-management-guidelines>.
- Edirisinghe, G. S., & Almutairi, T. (2023). Multi-Echelon Inventory Optimization for Practitioners: a Predictive Global Sensitivity Analysis Approach. *Operations Research Forum*, 4(2), 45. <https://doi.org/10.1007/s43069-023-00222-7>.
- ElectionsGroup. (2025, 2025). *Everything In Its Place: Keeping Ballots Organized*. <https://electionsgroup.com/resource/keeping-ballots-organized/>
- Electoral Matters Committee. (2025). Ballot paper shortages at the 2022 Victorian state election. <https://apo.org.au/node/330647>
- Fischer, H. (2011). *A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability*

- Using the Guaranteed-Service Model. *Proceedings of the 57th Hawaii International Conference on System Sciences*. <https://doi.org/10.24251/HICSS.2024.209>.
- Ross, S. M. (2014). *A First Course in Probability* (9th ed.). Pearson. <https://books.google.com/books?id=AstQCwAAQBAJ>.
- Schoenmeyr, T., & Graves, S. C. (2022). Coordination of Multiechelon Supply Chains Using the Guaranteed Service Framework. *Manufacturing & Service Operations Management*, 24(3), 1859–1871. <https://doi.org/10.1287/msom.2021.1043>.
- Schuster Puga, M., Minner, S., & Tancrez, J.-S. (2019). Two-stage supply chain design with safety stock placement decisions. *International Journal of Production Economics*, 209, 183–193. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2018.05.018>.
- SCI, S. C. o. I. (2023). *Statistical Yearbook of the country in 1402*. S. C. o. I. SCI. (In Persian). <http://amar.org.ir/Portals/0/PropertyAgent/6200/Files/37150/salname-kole-keshvar-1402.rar>
- Scolforo, M. Pennsylvania county settles federal lawsuit over ballot paper shortages in 2022 voting. *AP News*. <https://apnews.com/article/pennsylvania-voting-paper-ballots-lawsuit-51e69f21eb245d90b5adea742a1142df>
- Shanton, K. L. (2019). *The State and Local Role in Election Administration: Duties and Structures*. <https://www.congress.gov/crs-product/R45549>
- Simpson, K. F. (1958). In-Process Inventories. *Operations Research*, 6(6), 863–873. <https://doi.org/10.1287/opre.6.6.863>.
- Snyder, L. V., & Shen, Z. J. M. (2019). *Fundamentals of Supply Chain Theory*. Wiley. https://books.google.com/books?id=D_ALrgEACAAJ.
- UNDP. (2025). *Elections for People and Planet: A practical guide to managing environmental impacts and risks of electoral processes*. <https://www.undp.org/publications/elections-people-and-planet-practical-guide-managing-environmental-impacts-and-risks-electoral-processes>
- Vicente, J. J., Relvas, S., & Barbosa-Póvoa, A. P. (2025). Optimizing inventory planning in multi-echelon supply chains under uncertainty: a decision-making approach using review policies. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, 20(3), 477–493. <https://doi.org/10.1080/17509653.2025.2483523>.
- Wang, Y., Shu, J., Su, J., & Zhen, L. (2025). Inventory placement with carbon cap-and-trade in guaranteed service supply chains. *International Journal of Logistics Research and Applications*, 13(2), 99–120. <https://doi.org/10.1080/13675560903557866>.
- Magnanti, T. L., Shen, Z. J. M., Shu, J., Simchi-Levi, D., & Teo, C. P. (2006). Inventory placement in acyclic supply chain networks. *Operations Research Letters*, 34(2), 228–238. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2005.04.004>.
- Mehr. (2019). *Widespread public participation in elections/Possibility of tariff shortage in some areas*. <mehrnews.com/xRjGV> (In Persian)
- Minner, S. (1997). Dynamic programming algorithms for multi-stage safety stock optimization. *Operations-Research-Spektrum*, 19(4), 261–271. <https://doi.org/10.1007/BF01539783>.
- Moncayo-Martínez, L. A. (2026). Dataset on the solution to the guaranteed-service time inventory model across 38 real-world supply chains with normally distributed demand. *Data in Brief*, 67, 112991. <https://doi.org/10.1016/j.dib.2026.112991>.
- Moncayo-Martínez, L. A., & Mastrocinque, E. (2025). Solving the guaranteed-service time inventory model for real-world supply chains by implementing it in commercial optimisers. *Journal of Engineering Research*, 13(3), 2559–2571. <https://doi.org/10.1016/j.jer.2024.05.014>.
- Norris, P. (2015). *Why Elections Fail*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107280908>.
- Nyberg, A., Grossmann, I. E., & Westerlund, T. (2013). An Efficient Reformulation of the Multiechelon Stochastic Inventory System with Uncertain Demands. *AIChE Journal*, 59, 23–28. <https://doi.org/10.1002/aic.13977>.
- Orey, R., Gordon, G., & Thomas, C. (2022). *Preparing for Ballot Paper Shortages in 2022 and 2024*. <https://bipartisanpolicy.org/report/ballot-paper-shortages/>
- Porporatto, L. G., Achkar, V. G., Fumero, Y., Brunaud, B. B., Torres, N., & Corsano, G. (2025). MILP reformulation and extension of multi-echelon inventory optimization model based on the guaranteed service approach. *Computers & Chemical Engineering*, 202, 109305. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2025.109305>.
- Presidential Electoral Law of Iran, (1985). (In Persian). <https://www.shora-gc.ir/fa/news/5729>
- Puga, M. S., Minner, S., & Tancrez, J.-S. (2019). Two-stage supply chain design with safety stock placement decisions. *International Journal of Production Economics*, 209, 183–193. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2018.05.018>.
- Rolf, B., Lavassani, K., Lang, S., & Regge, I. (2024). Optimizing Safety Stock Placement in Large Real-World Automotive Supply Networks

- Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 193, 103813. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2024.103813>.
- Yu, J., Huang, D., & Yang, C. (2026). Optimizing large-scale inventory networks: An iterative decomposition approach. *IIE Transactions*, 58(8), 982–996. <https://doi.org/10.1080/24725854.2025.2561557>.
- Zhang, L., Ding, Y., & Shi, Y. (2024). Service time and pricing decisions in online retailing with drop-shipping and guaranteed service framework. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 41(02), 2350015. <https://doi.org/10.1142/S021759592350015X>.
- Zipkin, P. (2000). *Foundations of Inventory Management*. McGraw-Hill Companies, Incorporated. https://books.google.com/books?id=rjzbkQEA_CAAJ.