System Engineering and Productivity/ 2027/ Vol.7/ No.2/ 317-345

System Engineering and Productivity

10.22034/sep.2026.2106973.1563

The Single-item Capacitated Lot Sizing Problem for Perishable Items Considering All-units Quantity Discount and Resale

Yaser Makelian[1], Seyyed Hamid Mirmohammadi[2], Mohammad-Ali Eghbali[3,*]

[1] Caspian Faculty of Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

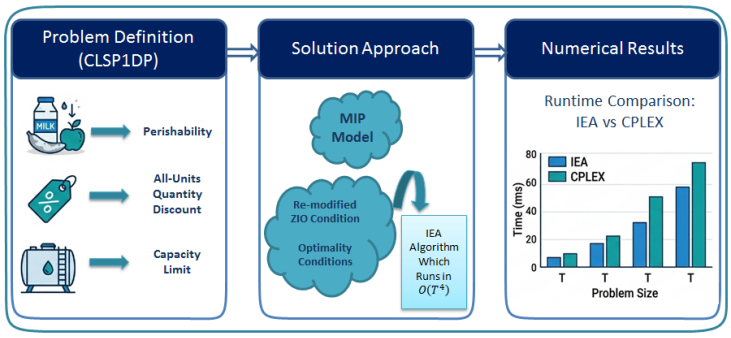
[2] Department of Industrial and Systems Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

[3] Department of Industrial Engineering, Faculty of Computer & Industrial Engineering, Birjand University of Technology, Iran

HIGHLIGHTS

- A single item capacitated lot sizing problem for perishable items is investigated.
- One-breakpoint all-units quantity discount and resale possibility are considered.
- An MIP model is proposed.
- Some useful properties of the optimal solution of the problem are found and proved.
- An implicit enumeration exact algorithm with $O(T^4)$ time complexity is developed.

GRAPHICAL ABSTRACT



ARTICLE INFO

Article history:
Article Type: Research paper
Received: 25 September 2026
Revised: 30 October 2026
Accepted: 10 November 2026
Available online: 10 November 2026

*Correspondence:
eghbali@birjandut.ac.ir

How to cite this article:
Malekian, Y., Mirmohammadi, S. H., & Eghbali, M. (2027). The single-item capacitated lot sizing problem for perishable items considering all-units quantity discount and resale. *System Engineering and Productivity, 7* (2), 317-345.

Keywords:
Capacitated Lot Sizing Problem
Perishability
All-units Quantity Discount
Complexity Analysis
Exact Algorithm

ABSTRACT

This study investigates a capacitated lot sizing problem for a perishable single item considering a 1-breakpoint all-units quantity discount and resale possibility. It is assumed that the lead time is zero, backlogging is not permitted, and the quality of items remains constant during their ages. Because of discount base incentives, the firm may decide to order a quantity more than what is needed during the lifetime of the order, to use the discount. In this case, the firm resells surplus items at a lower price at the ordering period. To deal with this problem, first, a mathematical model is presented. Second, some properties of the optimal solution are proved. Then, these properties are exploited in an implicit enumeration exact algorithm that solves the problem in O(T4) time complexity. Finally, the efficiency of the proposed algorithm is examined by developing an experimental design with various environments. Based on the observed runtimes, the proposed exact algorithm is found to outperform the CPLEX solver in solving the mathematical model.

2538-2195/© 2027 The Authors. Published by University of Eyvanekey. This is an open-access article under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) license.

1. Introduction

Economic Lot Sizing (ELS) problems represent a fundamental class of decision-making models in procurement, production, and inventory management. In these systems, dynamic demands over a finite planning horizon are satisfied by batch purchasing or manufacturing in specific periods, aiming to minimize total operational costs. Since the pioneering work of Wagner and Whitin (1958), who established the Zero-Inventory Ordering (ZIO) condition and provided a dynamic programming framework for the uncapacitated single-item lot sizing problem, numerous extensions have been explored. Modern operational environments, however, introduce complex constraints such as order capacity limitations, perishability of goods, quantity discounts, and secondary market opportunities like resale, which significantly complicate the underlying mathematical structures (Emadi et al., 2024; Veisi, 2026; Manesh-Bozorgi et al., 2026; Moshiri & Rashidi Komijan, 2023).

Order capacity limitations frequently arise due to physical storage space, budgetary bounds, or transportation constraints. Florian and Klein (1971) demonstrated that adding time-invariant capacity constraints to the concave-cost ELS problem renders it computationally challenging, though polynomially solvable by establishing the fractional period property. Parallel to capacity constraints, quantity discounts serve as major financial incentives offered by suppliers to encourage bulk purchasing. Chung et al. (1987) examined lot sizing under all-units quantity discounts and showed that optimal order quantities align either with discount breakpoints or cumulative demand requirements. Further research by Federgruen and Lee (1990) and Koca et al. (2014) advanced dynamic programming techniques for piecewise concave cost functions incorporating discounts.

Another critical operational dimension is perishability. Goods such as pharmaceutical products, perishable foodstuffs, and chemicals exhibit finite shelf lives, deteriorating after a fixed duration regardless of handling quality (Hsu, 2000; Önal et al., 2015). Recent advances in dynamic lot sizing have further extended these frameworks to handle complex deterioration and dynamic non-linear cost structures. For instance, Papadopoulos in 2025 and 2026 (Papadopoulos 2025, 2026) developed improved exact dynamic programming algorithms for single-item lot sizing with a one-breakpoint all-units quantity discount and piecewise linear production costs, substantially improving theoretical time complexities. Similarly, Fan et al. (2026) investigated a dynamic lot-sizing problem for a perishable product with multiple customers having different freshness requirements. By exploiting structural properties of optimal solutions, they developed a polynomial-time optimal algorithm for jointly determining production and inventory allocation decisions. Under discount incentives, purchasing quantities that exceed immediate requirements within the product's lifespan becomes attractive. To monetize surplus inventory that would otherwise spoil, firms may engage in resale activities at discounted rates during the ordering period (Sohn & Hwang, 1987; Li et al., 2012). Malekian et al. (2021) investigated the capacitated lot sizing problem with a 1-breakpoint all-units discount (CLSP1D) assuming non-perishable inventory. However, unifying order capacities, single-breakpoint all-units discounts, item perishability, and dynamic resale options within an exact polynomial-time optimization framework remains an unaddressed gap in the current literature. This study investigates the single-item time-invariant capacitated lot sizing problem for perishable items considering a 1-breakpoint all-units quantity discount and resale option (CLSP1DP). Fixed ordering costs and undiscounted unit purchase prices are assumed to be non-increasing over time, lead time is zero, and backlogging is strictly prohibited. Items follow a First-In, First-Out (FIFO) consumption mechanism. We analyze the theoretical properties of the optimal solution and exploit them to design an exact polynomial-time algorithm.

2. Problem Definition

The CLSP1DP considers a dynamic planning horizon consisting of T finite periods with known positive deterministic demands. A firm orders products subject to a constant order capacity C per period. An all-units quantity discount scheme with a single breakpoint D is available: if the order volume in a period reaches or exceeds D, a discounted unit purchase price applies to the entire order; otherwise, a higher undiscounted unit price is charged. Both the fixed setup cost and the undiscounted purchase price are non-increasing across the planning horizon.

Items have a finite shelf life of L periods, maintaining constant quality throughout their lifespan and perishing L periods after arrival. Because of the discount incentive, the firm may order quantities larger than the cumulative demand over the product's shelf life. In such cases, excess items can be resold in the ordering period at a reduced-price drop rate. A resold item yields immediate revenue, avoiding holding costs, but resale occurs only if the item cannot be consumed within its usable lifetime. Demand in each period must be fully satisfied from current orders or inventory carried over from previous periods under a FIFO issuance policy. The objective is to determine an optimal replenishment schedule that minimizes the sum of setup, purchase, inventory holding, and net resale costs over the planning horizon.

3. Solution Methodology

To solve the CLSP1DP exactly, we analyze the structural properties of optimal solutions based on regeneration intervals and fractional periods. A

period with zero inventory at its beginning is an LZ period, while a period with zero inventory at its end is an RZ period. An interval bounded by an LZ period at its start and an RZ period at its end constitutes a regeneration interval. In traditional lot sizing models, the classic ZIO condition requires that an order takes place only when the starting inventory level drops to zero. However, in the presence of all-units discounts, this condition does not necessarily hold. We prove a re-modified ZIO condition for CLSP1DP: if an order is placed in a period with positive starting inventory (an irregular order), its quantity in the optimal solution must equal the discount breakpoint$D$. Furthermore, any order accompanied by positive resale must also equal D.

We establish that each regeneration interval in an optimal solution can contain at most one fractional order (an order strictly between zero and capacity C that does not equal D). Furthermore, orders equal to D strictly precede orders equal to capacity C, and any fractional order is positioned between D-level orders and C-level orders depending on its relative size. Based on these sequence rules, a regeneration interval is partitioned into three distinct structural parts:

- **Part A:** An interval starting with zero inventory where all regular orders equal D. Irregular orders equal to D and resale operations can occur exclusively within Part A. We prove that at most two additional irregular orders can occur in Part A, and we construct an iterative procedure to compute the exact cost and ending inventory of these sub-plans.
- **Part B:** An intermediate interval characterized by strictly positive ending inventory where all orders equal capacity C, initiated by an order equal to C.
- **Part C:** An RZ ending interval where all orders equal capacity C, except possibly the first order which may be fractional or equal to C.

Five valid structural configurations exist for any regeneration interval: ABC, AC, A, BC, or C. Based on these structural characterizations; we develop polynomial-time algorithms to calculate the minimum cost for every possible candidate interval $[i, j]$ under each valid structural sequence. Once the minimum cost for all candidate intervals is established, the CLSP1DP is mapped onto a directed acyclic graph where nodes represent time periods and arc weights correspond to the optimal costs of the candidate regeneration intervals. Finding the shortest path from node 1 to node $T + 1$ via Dijkstra's algorithm yields the global optimal replenishment schedule. The overall computational complexity of this Implicit Enumeration Algorithm (IEA) is proved to be polynomial with a time complexity of$O(T^4)$.

4. Results and Conclusions

To evaluate the computational efficiency and scalability of the proposed Implicit Enumeration Algorithm (IEA), an extensive experimental study was conducted across various problem environments. The algorithm was coded in Visual C++ and compared against the mathematical programming model solved using the CPLEX solver on GAMS. Test instances were generated across problem horizons ranging from $T = 10$ to $T = 330$ periods, with capacity-to-discount ratios C/D categorized into four distinct experimental classes. For each problem size and class combination, multiple random instances were generated and solved. The computational experiments demonstrate the clear superiority of the proposed IEA over CPLEX in solving the CLSP1DP:

- **Execution Speed:** For small instances ($T \leq 50$), both CPLEX and IEA solved the problem within fractions of a second. However, as the planning horizon increased beyond $T = 90$, CPLEX's solution time grew exponentially, requiring hundreds of seconds for $T = 170$ and reaching the 1000-second time limit for $T > 170$ with non-zero optimality gaps. In contrast, the proposed IEA solved large-scale instances up to $T = 330$ periods within a few seconds (under 9 seconds on average).
- **Impact of Capacity-to-Discount Ratio (C/D):** While the performance of CPLEX remained largely insensitive to the C/D ratio, the IEA algorithm demonstrated enhanced efficiency for larger C/D ratios (Classes 3 and 4). Higher C/D values naturally limit the length of valid Part A candidate intervals due to perishability and capacity constraints, leading to early termination in candidate interval evaluations and significantly reducing overall CPU execution time.

In conclusion, the structural properties proved in this paper effectively reduce the solution space, allowing the proposed polynomial-time $O(T^4)$ algorithm to solve large-sized operational instances of the CLSP1DP rapidly and optimally, outperforming commercial mathematical solvers.

Acknowledgments

Not Applicable.

Funding

This research received no external funding.

Conflicts of Interest

The author declares that there are no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Author Contribution Statement

Yaser Malekian: Conceptualization, Methodology, Writing – original draft, Software, Validation, Investigation; **Seyyed Hamid Mirmohammadi:** Supervision, Project administration, Conceptualization, Methodology, investigation, Validation, Writing – review & editing; **Mohammad-Ali Eghbali:** Data curation, Formal analysis, Investigation, Methodology, Resources, Validation, Software, Visualization, Writing – review & editing.

Data Availability Statement

The code, processed data, parameter vectors, and computational outputs needed to reproduce the reported analyses are provided in the computational reproducibility package accompanying the article. The raw NASA C-MAPSS data remain available from the original public source.

References

Chung, C.-S., Chiang, D. T., & Lu, C.-Y. (1987). An optimal algorithm for the quantity discount problem. *Journal of Operations Management, 7*(1–2), 165–177. https://doi.org/10.1016/0272-6963(87)90015-5

Emadi, S. H., Sadeghian, A., Rabbani, M., & Dehghan Dehnavi, H. (2024). Application of optimal control approach in the optimization of production inventory systems in supply chain. *System Engineering and Productivity*, *4*(1), 85-98. https://doi.org/10.22034/msb.2024.2026595.1203

Fan, J., Ou, J., & Hsu, V. N. (2026). Dynamic lot sizing with multiple age-differentiated demands of a perishable product. *Naval Research Logistics, 73*(7), 1173–1187. https://doi.org/10.1002/nav.70081

Federgruen, A., & Lee, C.-Y. (1990). The dynamic lot size model with quantity discount. *Naval Research Logistics, 37*(5), 707–713. https://doi.org/10.1002/1520-6750(199010)37:5%3C707::AID-NAV3220370509%3E3.0.CO;2-5

Florian, M., & Klein, M. (1971). Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints. *Management Science, 18*(1), 12–20. https://doi.org/10.1287/mnsc.18.1.12

Friedman, Y., & Hoch, Y. (1978). A dynamic lot-size model with inventory deterioration. *INFOR: Information Systems and Operational Research, 16*(2), 183–188. https://doi.org/10.1080/03155986.1978.11731700

Hsu, V. N. (2000). Dynamic economic lot size model with perishable inventory. *Management Science, 46*(8), 1159–1169. https://doi.org/10.1287/mnsc.46.8.1159.12021

Koca, E., Yaman, H., & Aktürk, M. S. (2014). Lot sizing with piecewise concave production costs. *INFORMS Journal on Computing, 26*(4), 767–779. https://doi.org/10.1287/ijoc.2014.0597

Li, C.-L., Ou, J., & Hsu, V. N. (2012). Dynamic lot sizing with all-units discount and resales. *Naval Research Logistics, 59*(3–4), 230–243. https://doi.org/10.1002/nav.21484

Malekian, Y., Mirmohammadi, S. H., & Bijari, M. (2021). Polynomial-time algorithms to solve the single-item capacitated lot sizing problem with a 1-breakpoint all-units quantity discount. *Computers & Operations Research, 134*, Article 105373. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105373

Manesh-Bozorgi, M., Abtahi, A. R., & Haghighi-Rad, F. (2026). Recovery dynamics of pharmaceutical inventory policies under temporary demand shocks: an agent-based simulation study. *System Engineering and Productivity*, https://doi.org/10.22034/sep.2026.2095646.1533

Moshiri, S., & Rashidi Komijan, A. (2023). Integrated supply-production-distribution model with the aim of profit maximization (Case study: Zimaband Ariafer Factory). *System Engineering and Productivity*, *3*(1), 157-184. https://doi.org/10.22034/sep.2023.706146

Papadopoulos, K. (2025). An O(n log n) algorithm for single-item lot sizing with a one-breakpoint all-units discount and non-increasing prices [Preprint]. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.11368

Papadopoulos, K. (2026). A novel exact algorithm for economic lot-sizing with piecewise linear production costs. *Journal of Global Optimization, 96*(1), 171–205. https://doi.org/10.1007/s10898-026-01636-3

Sohn, K.-I., & Hwang, H. (1987). A dynamic quantity discount lot size model with resales. *European Journal of Operational Research, 28*(3), 293–297. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(87)80171-6

Veisi, O. (2026). An integrated optimization of spare parts inventory using machine-learning–based demand forecasting, taking into account safety stock and dual lead-time supply. *System Engineering and Productivity*, *6*(3), 225-262. https://doi.org/10.22034/sep.2026.2074035.1409

Wagner, H. M., & Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science, 5*(1), 89–96. https://doi.org/10.1287/mnsc.5.1.89

مهندسی سیستم و بهره‌وری/ سال ۱۴۰۷/ دوره ۷/ شماره ۲/ صفحه ۳۱۷-۳۴۵

نشریه مهندسی سیستم و بهره‌وری

10.22034/sep.2026.2106973.1563

مسئله‌ی تعیین اندازه دسته تک کالایی ظرفیت‌دار با در نظرگیری تخفیف، فسادپذیری و فروش مجدد

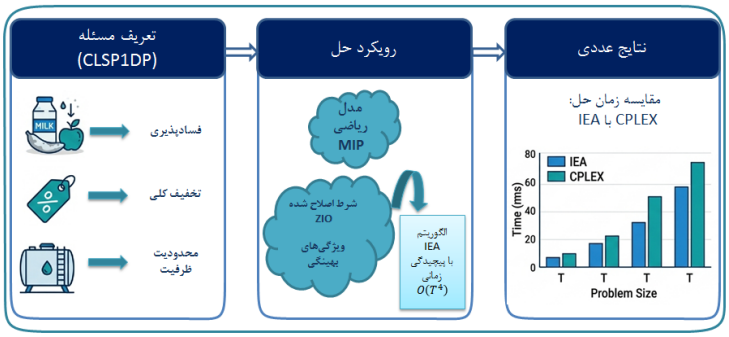
یاسر ملکیان[۱]، سیدحمید میرمحمدی[۲]، محمدعلی اقبالی[۳]

[۱] دانشکده فنی کاسپین، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

[۲] دانشکده صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

[۳] گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی کامپیوتر و صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

چکیده گرافیکی



برجسته‌ها

- بررسی مسئله تعیین اندازه دسته برای اقلام فساد پذیر.
- در نظر گیری تخفیف کلی تک نقطه‌ای و امکان فروش مجدد.
- ارائه یک مدل ریاضی خطی مخلوط.
- ارائه و اثبات چند ویژگی مفید برای جواب‌های بهینه مسئله.
- ارائه یک الگوریتم شمارش ضمنی دقیق با پیچیدگی زمانی $O(T^4)$.

چکیده

در این پژوهش، مسئله تعیین اندازه دسته تک‌کالایی ظرفیت‌دار برای کالای فسادپذیر، با در نظرگیری تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای و امکان فروش مجدد، موردبررسی قرار گرفته است. فرض بر این است که زمان تدارک صفر بوده، کمبود مجاز نیست و کیفیت کالا در طول عمر مفید آن ثابت باقی می‌ماند. به دلیل سیاست‌های تشویقی ناشی از تخفیف، شرکت ممکن است برای بهره‌مندی از تخفیف، مقداری بیش از مقدار موردنیاز خود در طول عمر مفید کالا سفارش دهد. در این حالت، شرکت مقدار کالای مازاد را در همان دوره صدور سفارش، با قیمت کمتر به فروش مجدد می‌رساند. ابتدا، یک مدل ریاضی برای مسئله ارائه می‌شود. سپس، برخی ویژگی‌های جواب بهینه اثبات می‌گردد. در ادامه، از این ویژگی‌ها برای طراحی یک الگوریتم شمارش ضمنی دقیق استفاده می‌شود که قادر است مسئله را با پیچیدگی زمانی $O(T^4)$، که T تعداد دوره‌ها است، حل کند. درنهایت، کارایی الگوریتم پیشنهادی با تولید نمودهای تصادفی ارزیابی می‌شود. نتایج حاصل از زمان‌های حل نشان می‌دهد که الگوریتم دقیق پیشنهادی در حل مسئله، عملکرد بهتری نسبت به حل‌کننده CPLEX دارد.

مشخصات مقاله

تاریخچه مقاله:

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۵/۰۷/۰۳

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۸/۰۸

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۸/۱۹

ارائه برخط: ۱۴۰۵/۰۸/۱۹

*نویسنده مسئول:

eghbali@birjandut.ac.ir

کلیدواژه‌ها:

مسئله تعیین اندازه دسته ظرفیت‌دار

فسادپذیری

تخفیف کلی

تحلیل پیچیدگی زمانی

الگوریتم دقیق

۲۱۹۵-۲۵۳۸/© ۲۰۲۷ نویسندگان. منتشرشده توسط دانشگاه ایوان‌کی. این یک مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط مجوز Creative Commons Attribution (CC BY 4.0) است.

۱- مقدمه

مسائل تعیین اندازه دسته اقتصادی[1] مربوط به سیستم‌های تأمین/تولید و موجودی است که در آن‌ها تقاضای تعدادی متناهی از دوره‌ها، از طریق تولید/سفارش محصول در برخی از این دوره‌ها تأمین می‌شود. در چنین شرایطی، هدف، یافتن سیاستی با کمترین هزینه است. با در نظرگیری مفروضاتی نظیر محدودیت بر سفارش/تولید/سطح موجودی، مجاز بودن کمبود پس‌افت، فروش ازدست‌رفته/برون‌سپاری و ساختار توابع هزینه، انواع مختلفی از مسائل ELS به وجود می‌آیند. در این پژوهش، مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی تک‌کالایی ظرفیت‌دار با ظرفیت ثابت در طول زمان، برای کالاهای فسادپذیر، با در نظرگیری تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای و امکان فروش مجدد و با فرض غیرافزایشی بودن هزینه ثابت سفارش‌دهی و قیمت خرید واحد بدون تخفیف که به‌اختصار CLSP1DP نامیده می‌شود، موردبررسی قرار می‌گیرد (Veisi, 2026؛ Manesh-Bozorgi et al., 2026؛ Emadi et al., 2024؛ Validoust et al., 2026).

یکی از موضوعات جذاب در این حوزه، تخفیف است. درصورتی‌که تخفیف گرفتن میسر باشد، خریداران تمایل دارند برای بهره‌مندی حداکثری از تخفیف، مقدار بیشتری سفارش دهند. در مقابل، محدودیت‌هایی نظیر ظرفیت حمل‌ونقل، بودجه و فضای انبار می‌توانند مقدار سفارش را کاهش دهند. عامل دیگری که ممکن است بر مقدار سفارش تأثیرگذار باشد، فسادپذیری کالا است. هنگامی‌که کالاها فسادپذیر نباشند، می‌توان آن‌ها را برای مدت نامحدود در انبار نگهداری کرد. بااین‌حال، کالاهایی نظیر محصولات لبنی، دارویی و کشاورزی ممکن است باگذشت زمان دچار فساد شوند؛ بنابراین، در مورد چنین کالاهایی، سیاست سفارش‌دهی باید عمر مفید کالا را در نظر بگیرد. بااین‌حال، در حضور تخفیف، شرکت ممکن است برای استفاده از مزایای تخفیف، مقداری بیش از میزان موردنیاز خود در طول عمر مفید کالا سفارش دهد. در چنین شرایطی، فروش مجدد کالاهای مازاد می‌تواند سود شرکت را افزایش دهد. ملاحظات فوق ما را بر آن داشت تا مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی تک‌کالایی ظرفیت‌دار با ظرفیت ثابت در طول زمان، برای کالاهای فسادپذیر، با در نظرگیری تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای و امکان فروش مجدد و با فرض غیرافزایشی بودن هزینه ثابت سفارشدهی و قیمت خرید واحد بدون تخفیف را مورد بررسی قرار دهیم.

۲- پیشینه پژوهش

واگنر و ویتین (Wagner & Whitin, 1958) مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی (ELS) را معرفی کردند. آن‌ها مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی تک‌کالایی بدون محدودیت ظرفیت را با تابع هزینه «خطی بعلاوه عدد ثابت» در نظر گرفته و با استفاده از شرط سفارش‌دهی با موجودی صفر (ZIO[2])، یک الگوریتم دقیق برنامه‌ریزی پویا برای حل مسئله ارائه کردند. شرط ZIO که بیان می‌کند «موجودی نباید به دوره‌ای که در آن سفارش انجام می‌شود منتقل شود»، باید در جواب بهینه مسئله واگنر و ویتین برقرار باشد (Kolbadinejad & Bagherinejad, 2023؛ Grubbström, 2014).

واقعیت‌های عملیاتی محیط‌های تولیدی و زنجیره تأمین اقتضا می‌کند که محدودیت‌های ظرفیت، ساختارهای تخفیف و ویژگی‌های کالاها نیز به مدل پایه افزوده شوند. با اضافه کردن برخی مفروضات، می‌توان به جواب‌های دقیق برخی از انواع مسائل ELS دست یافت. ازجمله این موارد می‌توان به پس‌افت (Ou, 2012؛ Zangwill, 1966, 1969؛ Hwang, 2010؛ Florian & Klein, 1971)، برون‌سپاری/فروش ازدست‌رفته (Liu et al., 2007؛ Zhang, 2015؛ Aksen et al., 2003)، مودهای تولید (Yu et al., 2013؛ Phouratsamay & Cheng, 2019) و الزام حداقل مقدار سفارش (Hellion et al., 2012, 2014؛ Okhrin & Richter, 2011) اشاره کرد. در توسعه الگوریتم‌های دقیق برای مسائل ELS، ویژگی‌های جواب بهینه نقش اساسی دارند. ازاین‌رو، در پژوهش حاضر، ویژگی‌های جواب‌های بهینه برای برخی از انواع مسئله تعیین اندازه دسته موردبررسی قرار می‌گیرند.

شرط ZIO اولیه ممکن است در برخی از انواع مسئله برقرار نباشد. این موضوع موجب شده است پژوهشگران یا شرط ZIO واگنر و ویتین را اصلاح کنند یا شرایط جایگزینی را ارائه دهند. اگرچه صورت ظرفیت‌دار مسئله تعیین اندازه دسته NP-Hard است (Florian et al., 1980). برای حالت

[1] Economic Lot Size (ELS)

[2] Zero Inventory Ordering

ظرفیت ثابت در طول زمان، برخی الگوریتم‌های دقیق چندجمله‌ای مبتنی بر ویژگی‌های بهینگی ارائه شده‌اند (van Hoesel & Wagelmans, 1996؛ Ou, 2012؛ Florian & Klein, 1971). فلوریان و کلاین (Florian & Klein, 1971) مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی ظرفیت‌دار تک‌کالایی را با تابع هزینه مقعر بررسی کردند. آن‌ها ویژگی دوره ناقص[1] را اثبات کردند که بیان می‌کند بین هر دو دوره متوالی با سطح موجودی صفر، حداکثر یک سفارش با مقداری کمتر از ظرفیت وجود دارد. آن‌ها با استفاده از این ویژگی، یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای حالت ظرفیت ثابت در طول زمان ارائه کردند. چونگ و لین (Chung & Lin, 1988) همین مسئله را با تابع هزینه خطی «بعلاوه عدد ثابت»، هزینه‌های واحد تولید و ثابت سفارش‌دهی غیرافزایشی و ظرفیت غیرکاهشی بررسی کرده و یک الگوریتم دقیق برنامه‌ریزی پویا با پیچیدگی زمانی $O(T^2)$ ارائه دادند. وان هوسل و واگلمنس (van Hoesel & Wagelmans, 1996) برای مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی تک‌کالایی ظرفیت‌دار با ظرفیت ثابت در طول زمان و تابع هزینه تولید مقعر، یک الگوریتم دقیق برنامه‌ریزی پویا با پیچیدگی زمانی $O(T^3)$ ارائه کردند. پینیرو و همکاران (Piñeyro et al., 2013) مسئله را با توابع هزینه مقعر و ظرفیت ثابت بررسی کرده و یک الگوریتم دقیق با پیچیدگی زمانی $O(T^3)$ برای حل مسئله ارائه دادند. گروبستروم (Grubbström, 2014) با در نظرگیری نرخ تولید متناهی برای تولید، شرط ZIO واگنر و ویتین را به‌شرط گوشه داخلی[2]، مماس بین تقاضای تجمعی و تولید تجمعی تغییر داد. کوالیف و پش (Kovalyov & Pesch, 2014) یک الگوریتم دقیق با پیچیدگی زمانی $O(T\log T)$ برای مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی تک‌کالایی ظرفیت‌دار با تابع هزینه تولید خطی ارائه کردند. لی و لی (Lee & Li, 2013) مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی با رزرو ظرفیت را بررسی کردند. آن‌ها با فرض ظرفیت ثابت، یک الگوریتم دقیق با پیچیدگی زمانی $O(T^4)$ برای حل مسئله ارائه کردند و همچنین نشان دادند که در حالتی که هزینه ثابت راه‌اندازی و هزینه‌ی واحد تولید، غیرافزایشی و ظرفیت غیرکاهشی باشد، مسئله در زمان $O(T^3)$ قابل‌حل است.

علاوه بر محدودیت ظرفیت، اعمال سیاست‌های تشویقی خرید مانند تخفیف، پویایی تصمیم‌گیری را پیچیده‌تر می‌کند. چونگ و همکاران (Chung et al., 1987) مسئله ELS را با راهبرد تخفیف کلی بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که هر زیرسیاست از جواب بهینه شامل دنباله‌ای از سفارش‌هاست که مقدار هر یک از آن‌ها، به‌جز آخرین سفارش، برابر با یکی از سطوح تخفیف است. آن‌ها با استفاده از یک روش درخت جست‌وجو، تمامی دنباله‌های سفارش سازگار با این ویژگی را به دست آوردند و سپس یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای تعیین سیاست بهینه ارائه کردند. بااین‌حال، الگوریتم آن‌ها برای مسائل با ابعاد بزرگ کارایی مناسبی نداشت. فدرگرون و لی (Federgruen & Lee, 1990) مسئله تعیین اندازه دسته پویا با هزینه تولید «خطی بعلاوه عدد ثابت» و هزینه‌های ثابت راه‌اندازی و واحد تولید غیرافزایشی را با در نظرگیری هر دو نظام تخفیف نموی و تخفیف کلی بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که این مسائل، به ترتیب، با پیچیدگی‌های زمانی $O(T^2)$ و $O(T^3)$ قابل‌حل هستند. چان و همکاران (Chan et al., 2002) مسئله ELS را با یک راهبرد تخفیف کلی اصلاح‌شده بررسی کرده و نشان دادند که مسئله NP-Hard است. چوبانوف و همکاران (Chubanov et al., 2006) مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی تک‌کالایی ظرفیت‌دار با ساختار هزینه یکنواخت را بررسی کردند و یک شمای تقریب چندجمله‌ای کامل برای حل مسئله ارائه دادند. آن‌ها فرض کردند تابع هزینه تولید غیرکاهشی است که تخفیف نموی را نیز پوشش می‌دهد. میرمحمدی و همکاران (Mirmohammadi et al., 2009) مسئله مطرح‌شده توسط چونگ و همکاران (Chung et al., 1987) را بررسی کرده و یک الگوریتم شاخه و کران برای حل دقیق مسئله ارائه دادند. آن‌ها نشان دادند که مقدار هر سفارش در سیاست بهینه، یا برابر با یکی از سطوح تخفیف و یا برابر با تقاضای تجمعی برخی دوره‌های بعدی منهای سطح موجودی فعلی است. همچنین، آن‌ها از یک شرط ZIO اصلاح‌شده در الگوریتم شاخه و کران خود استفاده کردند که بیان می‌کند درصورتی‌که موجودی ابتدای یک دوره برای تأمین تقاضای آن دوره کافی باشد، سفارشی در آن

[1] Fractional Period
[2] Inner Corner Condition

دوره صادر نمی‌شود. پاپادوپولوس (Papadopoulos, 2025) مسئله ELS را با در نظرگیری تخفیف کلی تک نقطه‌ای و شرط غیر افزایشی بودن قیمت، بررسی کرده و یک الگوریتم دقیق با پیچیدگی $O(T\log T)$ برای مسئله ارائه داد.

در راستای عمومیت بخشیدن به ساختار هزینه‌ها، کوجا و همکاران (Koca et al., 2014) حالت کلی مسئله ELS را با تابع هزینه تکه‌تکه مقعر (LS-PC) بررسی کردند که طیف گسترده‌ای از مسائل، ازجمله مسائل ظرفیت‌دار و مسائل دارای تخفیف کلی/نموی را دربر می‌گیرد. آن‌ها برای حل دقیق مسئله، از ویژگی دوره ناقص استفاده کردند و یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا با پیچیدگی زمانی $O(T^{2m+3})$ ارائه کردند که در آن، m تعداد نقاط شکست تابع هزینه است. او (Ou, 2017b) مسئله ELS ظرفیت‌دار را با تابع هزینه تولید دارای m نقطه شکست بررسی کرد و یک الگوریتم دقیق برنامه‌ریزی پویا با پیچیدگی زمانی $O(mT^3)$ ارائه داد. او (Ou, 2017a) مسئله کوجا و همکاران (Koca et al., 2014) را بررسی کرده و یک الگوریتم دقیق برنامه‌ریزی پویا ارائه داد که مسئله را در زمان $O(T^{2m+3})$ حل می‌کند که در آن m تعداد نقاط شکست تابع هزینه تولید است. علاوه بر این، با استفاده از ساختار داده خاصی با نام «پرس‌وجوی کمینه در بازه[1]»، نسخه بهبودیافته الگوریتم با زمان اجرای $O(T^{m+2})\log T$ ارائه شد. پاپادوپولوس (Papadopoulos, 2026) با ارائه یک الگوریتم دقیق، پیچیدگی حل مسئله کوجا و همکاران (Koca et al., 2014) را به $O(T^{m+2})$ رساند.

از سوی دیگر، با توجه به توجیه اقتصادی خرید بیش‌ازحد نیاز برای بهره‌مندی از تخفیف، امکان فروش مجدد کالاهای مازاد نیز در برخی مطالعات موردتوجه قرار گرفته است؛ به‌طوری‌که سون و هوانگ (Sohn & Hwang, 1987) مسئله ELS را با در نظرگیری تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای و امکان فروش مجدد بررسی کردند و یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا با پیچیدگی زمانی $O(T^3(\sum d/D)^2)$ برای حل مسئله ارائه دادند که در آن، $\sum d$ و D به ترتیب، نشان‌دهنده مجموع تقاضای دوره‌ها و سطح شکست تخفیف است. لی و همکاران (Li et al., 2012) مسئله ELS را با در نظرگیری تخفیف کلی و راهبرد فروش مجدد مطالعه کردند و نشان دادند که مسئله را می‌توان با پیچیدگی زمانی $O(T^{m+3})$ حل کرد که در آن، m نشان‌دهنده تعداد نقاط شکست تخفیف است. آن‌ها همچنین اثبات کردند که در حالت خاص راهبرد تخفیف تک‌نقطه‌ای، مسئله در زمان $O(T^3)$ قابل‌حل است. میرمحمدی و عشقی مسئله ELS را با در نظرگیری تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای و امکان فروش مجدد در زمان صدور سفارش بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از برخی قواعد حذف، یک الگوریتم شاخه و کران با پیچیدگی زمانی $O(T^4)$ ارائه کردند (Mirmohammadi & Eshghi, 2012).

علاوه بر ابعاد مالی و ظرفیتی، محدودیت‌های فیزیکی کالاها نظیر فسادپذیری نیز تأثیر بسزایی بر سیاست‌های سفارش‌دهی دارند. فریدمن و هوخ (Friedman & Hoch, 1978) فسادپذیری را در مسئله واگنر و ویتین در نظر گرفته و یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا برای حل دقیق مسئله ارائه کردند. هسو (Hsu, 2000) مسئله ELS را با توابع هزینه تولید و نگهداری مقعر و با در نظرگیری نرخ فساد موجودی بررسی کرد. همچنین، فرض شد هزینه نگهداری واحد به عمر کالا وابسته است و برای کالاهای قدیمی‌تر کمتر از کالاهای جدیدتر نیست. وی یک الگوریتم برنامه‌ریزی پویا با پیچیدگی $O(T^4)$ زمانی ارائه کرد. علاوه بر این، نشان داد که در حالت خاصی که هزینه‌های تولید و نگهداری «خطی بعلاوه عدد» ثابت است، مسئله با پیچیدگی زمانی $O(T^2)$ قابل‌حل است. چو و همکاران (Chu et al., 2005) مسئله مطالعه‌شده توسط هسو (Hsu, 2000) را با در نظرگیری هزینه‌های صرفه‌جویی ناشی از مقیاس تعمیم دادند. اونال و همکاران (Önal et al., 2015) مسئله ELS را با در نظرگیری فسادپذیری و ترجیح در ترتیب مصرف مطالعه کردند. آن‌ها سازوکارهای مصرف FIFO[2]، LIFO[3]، FEFO[4] و LEFO[5] را در نظر گرفته و اثبات کردند که نسخه بدون ظرفیت مسئله، تحت هر چهار سازوکار مصرف، در زمان چندجمله‌ای قابل‌حل است. همچنین نشان دادند که این نتیجه برای نسخه ظرفیت‌دار با ظرفیت ثابت در طول زمان، تحت سازوکارهای FIFO و

[1] Range Minimum Query

[2] First In-First Out
[3] Last In-First Out
[4] First Expiration-First Out
[5] Last Expiration-First Out

LEFO همچنان برقرار است؛ اما تحت سازوکارهای LIFO و FEFO، مسئله به یک مسئله‌ی NP-Hard تبدیل می‌شود. فان و همکاران (Fan et al., 2026) مسئله تعیین اندازه دسته پویا را برای یک محصول فسادپذیر با چند مشتری و الزامات متفاوت از نظر تازگی محصول برای هر مشتری بررسی کرده و با استخراج ویژگی‌های ساختاری جواب بهینه، یک الگوریتم دقیق با زمان چندجمله‌ای برای حل مسئله ارائه کردند. سن کالا را موردبررسی قرار داده و نقش حیاتی فساد محصول را در اتخاذ سیاست‌های بهینه سفارش‌دهی برجسته ساختند. سارگوت و ایشیک (Sargut & Işık, 2017) مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی ظرفیت‌دار تک‌کالایی برای کالاهای فسادپذیر را بررسی کردند. آن‌ها با در نظرگیری تابع هزینه تولید مقعر، تابع هزینه نگهداری وابسته به عمر کالا و نرخ فساد، اثبات کردند که مسئله NP-Hard است. همچنین، یک الگوریتم ابتکاری برنامه‌ریزی پویا برای حل مسئله ارائه کردند. سباتجانه و آدتنجی (Sebatjane & Adetunji, 2021) سیاست تعیین اندازه دسته را برای یک زنجیره تأمین سه‌سطحی از کالاهای فسادپذیر بررسی کردند. آن‌ها سیاست سنتی موجودی انتهای دوره صفر را تعدیل کرده و یک رویکرد حل مبتنی بر تکرار برای حل مسئله ارائه دادند. ملکیان و همکاران (Malekian et al., 2021) مسئله تعیین اندازه دسته اقتصادی را با در نظرگیری تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای و ظرفیت ثابت بررسی کرده و دو الگوریتم دقیق چندجمله‌ای برای حل مسئله ارائه کردند. با در نظرگیری عمر نامحدود برای کالاها و حذف امکان فروش مجدد در مسئله تحت بررسی در این پژوهش، مسئله CLSP1DP به مسئله CLSP1D تبدیل می‌شود.

به‌منظور روشن‌تر شدن جایگاه پژوهش حاضر در مقایسه با ادبیات موضوع، **جدول ۱** مقایسه‌ای جامع میان ویژگی‌های اصلی این مقاله و مطالعات پیشین مرتبط ارائه می‌دهد؛ همان‌طور که مشاهده می‌شود، هرچند مطالعات متعدد به بررسی جداگانه یا تلفیق محدود عوامل فوق پرداخته‌اند، اما یکپارچه‌سازی همزمان «محدودیت ظرفیت»، «تخفیف کلی»، «فسادپذیری» و «امکان فروش مجدد» در قالب یک مدل بهینه‌سازی و ارائه الگوریتم حل دقیق چندجمله‌ای همچنان به‌عنوان یک شکاف تحقیقاتی مطرح است. نوآوری اصلی پژوهش حاضر پر کردن این شکاف و ارائه یک الگوریتم شمارش ضمنی کارا برای حل دقیق این مسئله است. ادامه مقاله به این صورت سازمان‌دهی شده است: در **بخش ۳**، تعریف دقیق مسئله انجام می‌شود. در **بخش ۴**، ویژگی‌های جواب بهینه بررسی می‌شوند. در **بخش ۵**، یک الگوریتم دقیق چندجمله‌ای برای مسئله تحت بررسی، ارائه می‌شود. در **بخش ۶**، با ارائه نمودهای تصادفی، کارایی الگوریتم پیشنهادی بررسی می‌شود. درنهایت، **بخش ۷**، به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

۳- تعریف مسئله

در این مقاله، مسئله تعیین اندازه دسته پویای ظرفیت‌دار تک‌کالایی با در نظرگیری فروش مجدد و تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای برای کالاهای فسادپذیر (CLSP1DP) مورد مطالعه قرار می‌گیرد. افق برنامه‌ریزی شامل تعداد محدودی دوره زمانی است (T دوره). فرض کنید d_t بیانگر تقاضای دوره $t, (t = 1, \dots, T)$ باشد. کمبود مجاز نیست و تمامی تقاضاها در طول افق برنامه‌ریزی باید تأمین شوند. همچنین، زمان تدارک و سطح موجودی در ابتدای افق برنامه‌ریزی صفر در نظر گرفته می‌شوند. همچنین، فرض کنید که C ظرفیت سفارش‌دهی باشد که در همه دوره‌ها یکسان فرض شده است.

فرض ۱: بدون کاستن از کلیت مسئله و مطابق با ملکیان و همکاران (Malekian et al., 2021) و وان هوسل و واگلمنس (van Hoesel & Wagelmans, 1996)، فرض می‌کنیم $d_t \le C, (1 \le t \le T)$.

با در نظرگیری تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای، قیمت خرید واحد یک دسته سفارش‌داده‌شده‌ی Q در دوره t، که با $P_t(Q)$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_t(Q) = \begin{cases} p_t & , Q < D \\ (1-\alpha)p_t & , Q \ge D \end{cases} \qquad (۱)$$

که در رابطه فوق α، D و p_t به‌ترتیب بیانگر نرخ تخفیف، سطح تخفیف و قیمت خرید واحد بدون تخفیف در دوره t هستند. بدیهی است که برای $D > C$، تخفیف قابل صرف‌نظر کردن است. بنابراین، فرض می‌کنیم $D \le C$.

فرض ۲: مطابق با ملکیان و همکاران (Malekian et al., 2021)، فرض می‌کنیم هزینه ثابت سفارش‌دهی و قیمت خرید واحد بدون تخفیف کالا در طول دوره‌ها غیرافزایشی باشند.

جدول ۱. مقایسه پژوهش حاضر با مطالعات مرتبط از نظر ویژگی‌های کلیدی عملیاتی

Table 1. Comparison of the present study with related studies in terms of key operational features

پژوهش	تخفیف	فروش مجدد	فساد پذیری	ظرفیت	پیچیدگی زمانی
(Li et al., 2012)	✓	✓			$O(T^{m+3})$
(Hsu, 2000)			✓		$O(T^4)$
(Koca et al., 2014)	✓			✓	$O(T^{2m+7})$
(Önal et al., 2015)			✓	✓	چند جمله‌ای در FIFO
(Ou, 2017b)	✓			✓	$O(T^{m+3})\log T$
(Malekian et al., 2021)	✓			✓	$O(T^4)$
پژوهش حاضر	✓	✓	✓	✓	$O(T^4)$

طول عمر کالاها برابر با $L, (L > 1)$ دوره است و تمامی کالاها، $L-1$ دوره پس از دوره‌ای که در آن دریافت شده‌اند، فاسد می‌شوند. همچنین، فرض می‌شود کیفیت کالاها در طول عمر آن‌ها ثابت باقی می‌ماند. به دلیل مشوق‌های ناشی از تخفیف، شرکت ممکن است مقداری بیش از میزان موردنیاز خود در طول عمر کالا سفارش دهد. در این حالت، شرکت کالای مازاد را در همان دوره صدور سفارش t، با قیمت کمتری به فروش مجدد می‌رساند. بنابراین، اگر مقدار کالایی بیش از مقدار مورد نیاز سفارش داده شود، حتما با استفاده از مزیت تخفیف و به قیمت $(1-\alpha)p_t$ خریداری شده است. در این شرایط، شرکت، در همان‌دوره‌ای که سفارش صادر شده، مازاد سفارش را به قیمت $(1-\beta)p_t$ به فروش می‌رساند، که t، دوره‌ی صدور سفارش و β $(\beta > \alpha)$ نرخ کاهش قیمت فروش مجدد است. بنابراین، هزینه فروش مجدد یک واحد کالا در دوره t برابر است با $(\beta-\alpha)p_t$. بدیهی است که یک کالا تنها در صورتی به فروش مجدد می‌رسد که امکان استفاده از آن در طول عمرش وجود نداشته باشد. با توجه به فسادپذیری کالاها، مکانیزم مصرف از اهمیت برخوردار است. در این مقاله فرض می‌شود کالاهای موجود در انبار مطابق با مکانیزم FIFO مصرف می‌شوند.

نمادهای مورد استفاده در این پژوهش به صورت زیر است:

پارامترها

T تعداد دوره‌ها

h_t هزینه نگهداری واحد کالا در دوره t

p_t قیمت بدون تخفیف واحد کالا در دوره t

d_t تقاضای دوره t ام

S_t هزینه ثابت سفارش‌دهی در دوره t

C ظرفیت سفارش

D سطح شکست تخفیف

α نرخ تخفیف

β نرخ کاهش قیمت، وقتی کالا مجدداً به فروش می‌رسد.

L عمر مفید محصول

V_{tj}^0 هزینه یک واحد محصول، اگر بدون استفاده از تخفیف، در دوره t سفارش داده شده و در دوره j مصرف شود.

V_{tj}^1 هزینه یک واحد محصول، اگر با استفاده از تخفیف، در دوره t سفارش داده شده و در دوره j مصرف شود.

در پارامترهای بالا V_{tj}^0 و V_{tj}^1 به ترتیب به‌صورت $p_t + \sum_{i=t}^{j-1} h_i$ و $(1-\alpha)p_t + \sum_{i=t}^{j-1} h_i$ هستند.

توابع

$P_t(\cdot)$ هزینه سفارش واحد کالا در دوره t

متغیرهای تصمیم

x_{tj}^0 مقدار کالایی که در دوره t سفارش داده شده و در دوره j مصرف می‌شود، وقتی سفارش دوره t از مزیت تخفیف استفاده نمی‌کند.

x_{tj}^1 مقدار کالایی که در دوره t سفارش داده شده و در دوره j مصرف می‌شود، وقتی سفارش دوره t از مزیت تخفیف استفاده می‌کند.

z_t مقدار کالای فروش مجدد شده در دوره t.

y_t متغیر باینری؛ اگر در دوره t سفارش مثبت صادر

شود برابر با یک و در غیر این صورت برابر با صفر است.

g_t متغیر باینری؛ اگر سفارش صادر شده در دوره t از مزیت تخفیف استفاده کند برابر با یک و در غیر این صورت برابر با صفر است.

e_{tj} متغیر باینری؛ اگر سفارش صادر شده در دوره t، تمام یا بخشی از تقاضای دوره j را برآورده کند برابر با یک و در غیر این صورت برابر با صفر است.

مدل ریاضی خطی عدد صحیح مسئله CLSP1DP را می‌توان به صورت زیر فرموله کرد:

$$\min Z = \sum_{t=1}^{T}\left(S_t y_t + (\beta-\alpha)p_t z_t + \sum_{j=t}^{\min\{T,t+L-1\}}\left(V_{tj}^0 x_{tj}^0 + V_{tj}^1 x_{tj}^1\right)\right) \quad (۲)$$

S.t.

$$\sum_{t=\max\{1,j-L+1\}}^{j}\left(x_{tj}^0 + x_{tj}^1\right) = d_j \qquad ,j = 1,\dots,T \quad (۳)$$

$$z_t + \sum_{j=t}^{\min\{T,t+L-1\}}\left(x_{tj}^0 + x_{tj}^1\right) \le C y_t \qquad ,t = 1,\dots,T \quad (۴)$$

$$\sum_{j=t}^{\min\{T,t+L-1\}} x_{tj}^0 \le D(1-g_t) \qquad ,t = 1,\dots,T \quad (۵)$$

$$D g_t \le z_t + \sum_{j=t}^{\min\{T,t+L-1\}} x_{tj}^1 \le C g_t \qquad ,t = 1,\dots,T \quad (۶)$$

$$x_{tj}^0 + x_{tj}^1 \le d_j e_{tj} \qquad ,j = 1,\dots,T, t = \max\{1, j-L+1\},\dots,j \quad (۷)$$

$$z_t \le C\left(1-e_{ij}\right) \qquad ,j = 1,\dots,T, t = \max\{1, j-L+1\},\dots,j, t < i \le j \quad (۸)$$

$$e_{tj} + e_{ik} \le 1 \qquad ,j = 1,\dots,T, t = \max\{1, j-L+1\},\dots,j, t < i \le j < k \quad (۹)$$

$$z_t, x_{tj}^0, x_{tj}^1 \ge 0 \quad (۱۰)$$

$$y_t, g_t, e_{tj} \in \{0,1\} \quad (۱۱)$$

در مدل ریاضی، تابع هدف (۲) مجموع هزینه‌های فروش مجدد، سفارش و نگهداری در طول افق برنامه‌ریزی را محاسبه می‌کند. محدودیت (۳) تضمین می‌کند که تقاضای تمامی دوره‌ها تأمین شود. محدودیت (۴) ضمن جلوگیری از تجاوز مقدار سفارش از ظرفیت، مقدار سفارش در هر دوره را به متغیر باینری مربوطه ارتباط می‌دهد. محدودیت (۵) بیان می‌کند که سفارش در دوره t تنها در صورتی می‌تواند تمامی یا قسمتی از تقاضای تعدادی دوره را بدون بهره‌مندی از تخفیف تأمین کند که مقدار g_t برابر با صفر باشد. محدودیت (۶) مقادیر سفارش مشمول تخفیف و مقدار کالای مجدداً فروش‌رفته را به متغیر باینری g_t مرتبط می‌کند. محدودیت (۷) متغیرهای نامنفی x_{tj}^0 و x_{tj}^1 را به متغیر باینری e_{ij} مرتبط می‌سازند. محدودیت (۸) تضمین می‌کند که کالا در صورتی مجدداً به فروش برسد که امکان مصرف آن در طول عمر مفیدش وجود نداشته باشد. کارکرد محدودیت مذکور به این صورت است که، اگر با توجه به عمر محصول، دوره t، امکان تأمین تقاضای دوره j را داشته باشد و دوره‌ای بین t و j (شامل خود دوره‌ی j)، تمامی یا قسمتی از تقاضای j را تأمین کرده باشد، مقدار فروش مجدد در دوره t برابر با صفر خواهد بود. خاطر نشان می‌کنیم که سیاست مصرف FIFO است و اگر در این حالت، در t فروش مجدد اتفاق بیافتد، بدین معنی است که کالای مجدداً فروش رفته، در طول عمر خود می‌توانست در دوره j مصرف شود ولی به فروش رفته. محدودیت (۹) مکانیزم مصرف FIFO را تضمین می‌کند. در نهایت، محدودیت‌های (۱۰) و (۱۱)، دامنه و نوع متغیرهای تصمیم را مشخص می‌کنند.

با توجه به اینکه مکانیزم مصرف FIFO است و همچنین، کالا تنها زمانی مجدداً به فروش می‌رسد که در طول عمر مفید خود، امکان مصرف شدن را نداشته باشد، بردار $Q = (Q_1, \dots, Q_T)$ که در آن Q_t مقدار سفارش در دوره t است، می‌تواند یک جواب شدنی را نمایندگی کند. با

تعیین مقادیر سفارشات دوره‌ها و با توجه به تقاضای دوره‌ها و عمر مفید کالا، مقادیر مصرف شده از هر سفارش در هر دوره و همچنین مقدار فروش مجدد در هر دوره قابل تعیین است. در ادامه، $I = (I_1, \dots, I_T)$ بردار سطح موجودی انتهای دوره‌ها متناظر با جواب $Q = (Q_1, \dots, Q_T)$ است.

۴- ویژگی‌های بهینگی

در این بخش، به‌منظور یافتن ویژگی‌های بهینگی مفید، ساختار جواب بهینه مسئله CLSP1DP مورد تحلیل قرار می‌گیرد. بدین منظور، همان‌گونه که در پژوهش‌های مرتبط با مسائل اندازه دسته ظرفیت‌دار رایج است، برای بررسی ساختار جواب‌های بهینه، از مفاهیم بازه بازتولید[1] و دوره ناقص استفاده می‌کنیم. مفاهیم زیر از مطالعه ملکیان و همکاران (Malekian et al., 2021) اقتباس شده است:

تعریف ۱: دوره‌های i تا j را بازه نامیده و با $[i,j]$ نشان می‌دهیم اگر $I_t > 0, (i \le t < j)$.

تعریف ۲: بازه $[i,j]$ را RZ[2] می‌نامیم اگر $I_j = 0$.

تعریف ۳: بازه $[i,j]$ را LZ[3] می‌نامیم اگر $I_{i-1} = 0$.

تعریف ۴: یک بازه را بازه بازتولید می‌نامیم اگر هم RZ و هم LZ باشد.

در مسائل ظرفیت‌دار تعیین اندازه دسته اقتصادی (ELS)، سفارشی که مقدار آن برابر با صفر و ظرفیت نباشد و دوره متناظر با آن، به ترتیب، «سفارش ناقص» و «دوره ناقص» نامیده می‌شود. در مسئله تعیین اندازه دسته با تابع هزینه تکه‌تکه مقعر[4] (LS-PC)، دوره ناقص به دوره‌ای اطلاق می‌شود که مقدار سفارش آن با هیچ یک از نقاط شکست تابع هزینه برابر نباشد (Koca et al., 2014). بنابراین، برای مسئله CLSP1DP سفارش ناقص به‌صورت زیر قابل‌تعریف است:

تعریف ۵: سفارش Q ناقص است اگر $Q \notin \{0, D, C\}$.

ویژگی ۱: در جواب بهینه، هر سفارش در دوره‌های با فروش مجدد اکیداً مثبت، برابر با D است.

اثبات: فرض کنید، در جواب بهینه، در دوره مفروض t داشته باشیم $Q_t \neq D$ و $z_t > 0$. با توجه به فرض $\beta > \alpha$، با کم کردن ε به‌طور هم‌زمان، از Q_t و z_t، با حفظ موجه بودن جواب (سطح موجودی انتهای دوره t ثابت مانده)، هزینه سفارش در دوره مذکور کمتر شده و منجر به بهبود مقدار تابع هدف می‌شود که با بهینگی جواب در تناقض است.

با توجه به ویژگی ۱، در جواب بهینه، سفارش‌هایی که با فروش مجدد مثبت همراه هستند، ناقص نیستند. همچنین، سطح موجودی انتهای افق برنامه‌ریزی در جواب بهینه برابر با صفر است؛ زیرا در غیر این صورت، اگر آخرین سفارش با D برابر نباشد، می‌توان مقدار آن را کاهش داد و چنانچه برابر با D باشد، می‌توان موجودی مازاد را مجدداً به فروش رساند که در هر دو حالت، موجب بهبود مقدار تابع هدف خواهد شد. بنابراین، با توجه به صفر بودن موجودی در ابتدای افق برنامه‌ریزی، جواب بهینه مسئله CLSP1DP از مجموعه‌ای از دوره‌های بازتولید متوالی تشکیل می‌شود. قضیه زیر که برای دوره‌های بازتولید در جواب بهینه مسئله LS-PC برقرار است، در مسئله CLS1DP نیز برقرار خواهد بود.

قضیه ۱: یک جواب بهینه برای مسئله CLSP1DP وجود دارد به‌نحوی‌که در هر بازه بازتولید آن، حداکثر یک سفارش ناقص وجود.

اثبات: فرض کنید در یک بازه بازتولید از یک جواب بهینه، دو سفارش ناقص Q_t و Q_j صادر شده باشد، به‌طوری‌که $t < j$. ازآنجاکه $I_k > 0\ (t \le k < j)$ است، اگر در بازه $[t+1, j-1]$ فروش مجدد اتفاق افتاده باشد، با فرض i به‌عنوان اولین دوره در $[t+1, j-1]$ با مقدار فروش اکیداً مثبت، کاهش هم‌زمان Q_t و z_i به‌اندازه ε واحد، مقدار تابع هدف را بهبود می‌بخشد. در غیر این صورت، با انتقال ε واحد از Q_t به Q_j، طبق فرض ۲، هزینه خرید افزایش نیافته، هزینه نگهداری کاهش یافته و سایر هزینه‌ها ثابت می‌ماند که با بهینگی جواب در تناقض است.

ملکیان و همکاران (Malekian et al., 2021) نشان دادند که در جواب بهینه مسئله ELS ظرفیت‌دار در حضور تخفیف، شرط ZIO اصلاح‌شده ارائه‌شده توسط میرمحمدی و همکاران (Mirmohammadi et al., 2009)، لزوماً برقرار نیست. به‌بیان‌دیگر، ممکن است در جواب بهینه، در

[1] Regeneration Interval
[2] Right Inventory Zero Interval (RZ)
[3] Left Inventory Zero Interval (LZ)
[4] Lot Sizing Piecewise Concave (LS-PC)

دوره‌ای سفارش صادر شود که سطح موجودی ابتدای آن دوره، پاسخگوی تقاضای همان دوره باشد. ازاین‌رو، آن‌ها چنین سفارشی را «سفارش نامتعارف[۱]» نامیدند و شرط ZIO را برای مسئله موردنظر مجدداً اصلاح کردند. بر اساس این شرط، «در جواب بهینه، اگر سطح موجودی ابتدای یک دوره پاسخگوی تقاضای آن دوره باشد، یا سفارشی در آن دوره صادر نمی‌شود یا مقداری برابر با سطح تخفیف سفارش داده می‌شود». به‌عبارت‌دیگر، شرط ZIO مجدداً اصلاح‌شده، مقدار سفارش‌های نامتعارف در جواب بهینه را به سطح تخفیف محدود می‌کند. با میل کردن عمر مفید کالا به بی‌نهایت و یک قرار دادن نرخ کاهش قیمت فروش مجدد در مسئله تحت بررسی، مسئله CLSP1DP به مسئله CLSP1D تبدیل می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، مسئله موردبررسی در این مقاله، حالت کلی‌تر مسئله CLSP1D است و بنابراین، شرط ZIO اصلاح‌شده در جواب بهینه CLSP1DP هم لزوماً برقرار نیست. در قضیه ۲، نشان می‌دهیم که شرط ZIO مجدداً اصلاح‌شده (برای مسئله CLSP1D) برای مسئله CLSP1DP هم برقرار است.

تعریف ۶: سفارش Q_t نامتعارف است اگر $I_{t-1} \geq d_t$ و $Q_t > 0$.

قضیه ۲: در هر جواب بهینه، اگر به ازای $t\ (1 \leq t \leq T)$ داشته باشیم $I_{t-1} \geq d_t$، آنگاه $Q_t \in \{0, D\}$.

اثبات: فرض کنید، سفارش $Q_t \notin \{0, D\}$ در بازه بازتولید $[i, j]$ از جواب بهینه صادر شده و داریم $I_{t-1} \geq d_t$. اگر در $[t+1, j]$ فروش مجدد اتفاق افتاده باشد، با فرض k به‌عنوان اولین دوره در بازه مفروض با فروش مجدد اکیداً مثبت، با کاهش هم‌زمان Q_t و z_k به‌اندازه ε واحد، مقدار تابع هدف بهتر می‌شود که با بهینگی جواب در تناقض است. بنابراین، در بازه $[t+1, j]$ فروش مجددی اتفاق نیفتاده است. در بازه مذکور حداقل یک دوره وجود داشته باشد که در آن دوره یا سفارش اکیداً مثبت صادر نشده و یا سفارشی کمتر از ظرفیت صادرشده؛ زیرا، در غیر این صورت، با توجه به فرض ۱، سطح موجودی انتهای دوره‌ها در بازه، روند غیر نزولی گرفته و شرط $I_j = 0$ تأمین نمی‌شود. بنابراین دوره $j', (t < j' \leq j)$ وجود دارد به‌نحوی‌که $j'\ \ j' = \min\{k | Q_k < C, t < k \leq j+1\}$ اولین دوره بعد از t است که در آن یا سفارش صادر نشده یا سفارشی کمتر از ظرفیت صادر شده است). بنابراین، خواهیم داشت $Q_k = C\ (t < k < j')$ و با توجه به فرض ۱، نتیجه می‌شود $I_k \geq Q_t\ (t < k < j')$. با در نظرگیری $Q_t \neq D$، اگر $Q_t \leq Q_{j'}$، و درنتیجه $P_t(Q_t) \geq P_{j'}(Q_{j'})$، با انتقال ϵ واحد از Q_t به $Q_{j'}$، مقدار تابع هدف بهبودیافته و بهینگی جواب نقض می‌شود. در غیر این صورت، با تعویض مقادیر سفارش دوره‌های t و j'، هزینه نگهداری کاهش یافته و هزینه خرید افزایش پیدا نمی‌کند که با بهینگی جواب در تناقض است (اگر $Q_{j'} = 0$، با توجه به فرض ۲، با تعویض مقادیر سفارشات، مقدار تابع هدف بهبود پیدا می‌کند). خاطرنشان می‌کنیم که چون $I_k \geq Q_t\ (t < k < j')$، در حالت $Q_t > Q_{j'}$، با تعویض مقادیر دو سفارش، جواب همچنان شدنی است. بنابراین، اگر $I_{t-1} \geq d_t$ و $Q_t \notin \{0, D\}$ باشد، همیشه یک جواب موجه بهتر وجود دارد و اثبات کامل شد.

ویژگی‌های زیر که در جواب بهینه مسئله CLSP1D برقرارند، در جواب بهینه مسئله CLSP1DP هم برقرار هستند.

ویژگی ۲: در هر بازه بازتولید جواب بهینه، تمامی سفارشات به‌اندازه D، قبل از تمامی سفارشات به‌اندازه C، صادر شده‌اند.

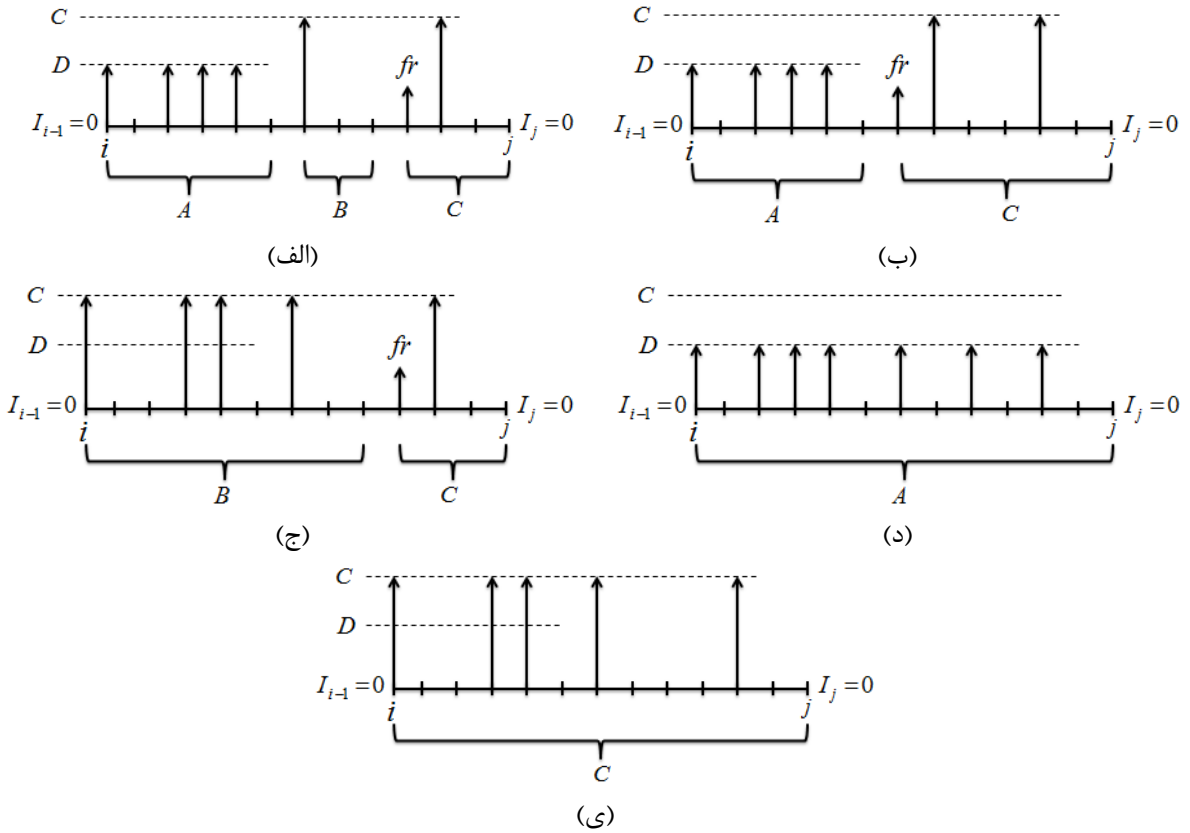
اثبات: فرض کنید، در یک بازه بازتولید مفروض جواب بهینه، $Q_i = C$ بوده و دوره j اولین دوره بعد از i در همان بازه بازتولید، با سفارش $Q_j = D$ باشد. با توجه به ویژگی ۱، در $[i, j-1]$ هیچ فروش مجددی اتفاق نیفتاده است. ازآنجایی‌که $I_k > 0\ (i \leq k < j)$ است، اگر در j فروش مجدد، اکیداً مثبت باشد، با کاهش هم‌زمان Q_i و z_j به‌اندازه ε واحد، مقدار تابع هدف بهتر می‌شود. در غیر این صورت، با انتقال ε واحد از Q_i به Q_j، مقدار تابع هدف بهتر شده و نقض بهینگی جواب می‌شود.

ویژگی ۳: اگر در یک بازه بازتولید جواب بهینه، سفارش ناقص صادر شده باشد، سفارش ناقص مذکور بعد از تمامی سفارشات به‌اندازه D در آن بازه بازتولید، صادر شده است. (اثبات ویژگی ۳ مشابه با اثبات ویژگی ۲ است).

ویژگی ۴: اگر در یک بازه بازتولید جواب بهینه، سفارش ناقصی بزرگ‌تر از D صادر شده باشد، سفارش ناقص مذکور قبل از تمامی سفارشات به‌اندازه C در آن بازه

[۱] Irregular Order

بازتولید، صادر شده است. (اثبات ویژگی ۴ مشابه با اثبات ویژگی ۲ است).



شکل ۱. ساختارهای بازه بازتولید در سناریوهای ممکن.

Figure 1. Structures of the reproduction intervals in possible scenarios.

با توجه به ویژگی‌های ۲ تا ۴، یک بازه بازتولید در جواب بهینه را به بخش‌های A، B و C، مطابق با تعاریف زیر، افراز می‌کنیم.

تعریف ۷: بازه $[i,j]$ از نوع بخش A است اگر LZ باشد و تمامی سفارشات اکیداً مثبت آن برابر با D باشد و همچنین داشته باشم $I_j \le d_{j+1}$ یا $j=T$.

تعریف ۸: بازه $[i,j], j<T$ از نوع بخش B است اگر موجودی انتهای دوره اکیداً مثبت داشته باشد و تمام سفارشات مثبت آن برابر با C باشد. یک سفارش برابر با C در اولین دوره بازه صادر می‌شود و همچنین داریم $I_j \le d_{j+1}$.

تعریف ۹: بازه $[i,j]$ از نوع بخش C است اگر RZ بوده و تمام سفارشات مثبت آن برابر با C باشد. به جز اولین سفارش که می‌تواند برابر با C بوده یا یک سفارش ناقص باشد. یک سفارش مثبت در اولین دوره بازه صادر می‌شود.

با توجه به تعاریف ۷ تا ۹، ۵ حالت برای ساختار یک بازه بازتولید در جواب بهینه امکان‌پذیر است. بازه بازتولید از بخش‌های متوالی ABC، AC، A، BC یا C تشکیل می‌شود که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.

با توجه به قضیه ۲ و ویژگی ۱، سفارش نامتعارف و فروش مجدد تنها ممکن است در بخش A رخ دهند. علاوه بر این، ساختارهای ABC و BC حتماً دارای سفارش‌های ناقص هستند؛ در غیر این صورت، به ترتیب می‌توان آن‌ها را به AC و C تبدیل کرد. همچنین، بر اساس ویژگی ۴، اگر سفارش ناقص بزرگ‌تر از D باشد، بازه بازتولید از ساختارهای AC یا C تشکیل می‌شود.

۴-۱- بررسی بخش A

با توجه به قضیه ۲ و ویژگی ۱، سفارشات نامتعارف در جواب بهینه، فقط در بخش A امکان حضور دارند. با تعریف «دوره غیرفعال[1]» به‌عنوان دوره‌هایی که در آن‌ها سفارشی صادر نمی‌شود، لم‌های زیر را ارائه و اثبات می‌کنیم. وقتی دوره‌ای که آخرین دوره بازه نیست،

[1] Inactive Period

غیرفعال نیست، موجودی از دوره قبلی‌اش به دوره بعدی منتقل می‌شود که نیاز به دست کم عمر مفید برابر با ۳ برای کالا دارد؛ بنابراین، در حالت $L=2$، تنها آخرین دوره از بخش A می‌تواند غیرفعال باشد.

لم ۱: با در نظرگیری $[i,j]$ به‌عنوان بخش A و t به‌عنوان آخرین دوره غیرفعال بخش مذکور، اگر در بازه $[t+1,j]$ فروش مجدد اتفاق افتاده باشد، صدور یک سفارش جدید با مقدار D در دوره t، سطح موجودی انتهای بخش را تغییر نمی‌دهد.

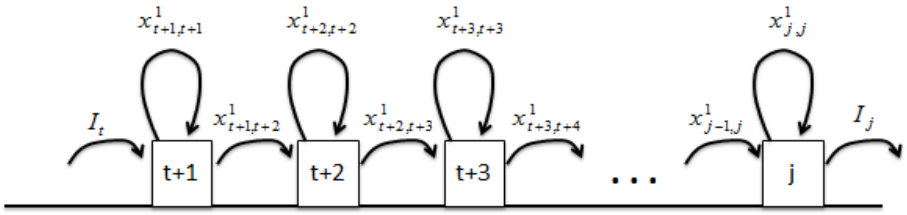
اثبات: دوره $t', (t'>t)$ را اولین دوره بعد از t در نظر بگیرید که در آن، فروش مجدد اکیداً مثبت اتفاق افتاده است. با توجه به این‌که مقداری از سفارش صادرشده در دوره t' در عمر مفید خود قابل‌مصرف نیست و با توجه به سیاست مصرف FIFO، هراندازه موجودی قابل‌مصرف در عمر کالا به سطح موجودی ابتدای دوره t' اضافه شود، به همان اندازه به مقدار فروش مجدد در دوره t' اضافه‌شده و سطح موجودی انتهای دوره t' تغییری نخواهد کرد. بنابراین، صدور یک سفارش جدید در دوره t سطح موجودی انتهای بخش را تغییر نمی‌دهد.

لم ۲: با در نظرگیری $[i,j]$ به‌عنوان بخش **A** با حداقل یک دوره غیرفعال و t به‌عنوان آخرین دوره غیرفعال بخش مذکور، اگر در بازه $[t+1,j]$ سفارش نامتعارفی وجود نداشته باشد و داشته باشیم $d_{j+1}>D$، با صدور یک سفارش جدید با مقدار D در دوره t، سطح موجودی انتهای بخش به‌اندازه D واحد افزایش می‌یابد.

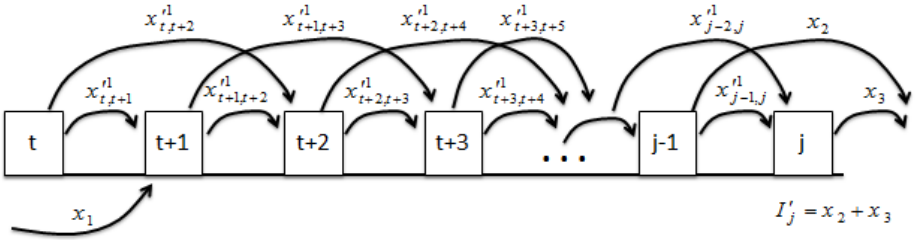
اثبات: در حالتی که $L=2$ باشد، داریم $t=j$ و چون $d_{j+1}>D$ است، صدور یک سفارش جدید به‌اندازه D در دوره j سطح موجودی انتهای دوره j را به‌اندازه D واحد افزایش می‌دهد. فرض کنید $L>2$ باشد. در دوره j فروش مجدد اتفاق نیفتاده است. زیرا، چون $I_j<d_{j+1}$ است، فروش مجدد در j نتیجه خواهد داد $L=1$ که مخالف فرض است.

همچنین، در $[t+1,j-1]$ نیز فروش مجدد اتفاق نیفتاده است. زیرا اگر در دوره‌ای در بازه مذکور فروش مجدد اتفاق بیافتد، دوره بعدی سفارش نامتعارف دارد که خلاف فرض است. خاطرنشان می‌کنیم که چون t آخرین دوره غیرفعال $[i,j]$ است، در تمامی دوره‌های موجود در بازه $[t+1,j-1]$ سفارش به‌اندازه D صادر شده است. چون در $[t+1,j-1]$ سفارشات نامتعارف نیستند و تمامی دوره‌ها سفارش اکیداً مثبت دارند و فروش مجددی هم اتفاق نیفتاده است، می‌توان نتیجه گرفت که در بازه مذکور، سفارش صادر شده در دوره k $(k=t+1,\dots,j)$ تقاضای دوره‌های k و $k+1$ را تأمین می‌کند. **شکل ۲** **(الف)** نحوه تأمین تقاضای دوره‌ها در این حالت را نشان می‌دهد که در شکل مذکور داریم:

$$I_t + x^1_{t+1,t+1} = d_{t+1} \qquad (۱۲)$$
$$x^1_{k-1,k} + x^1_{k,k} = d_k \quad ,k=t+2,\dots,j$$
$$x^1_{k,k} + x^1_{k,k+1} = D \quad ,k=t+1,\dots,j-1$$
$$x^1_{j,j} + I_j = D$$



الف) نحوه مصرف سفارشات در بازه‌ای که در تمام دوره‌های آن سفارش متعارف به اندازه D صادر شده



ب) نحوه مصرف سفارشات بعد از صدور یک سفارش مازاد به اندازه D در دوره t

شکل ۲. نحوه مصرف سفارشات در بخش A.

Figure 2. Order consumption method in Section A.

از آنجا که $L \geq 3$ است، با صدور یک سفارش مازاد در دوره t، مصرف با توجه به سیاست FIFO به صورت **شکل ۲ (ب)** خواهد بود. که در شکل مذکور روابط زیر داریم:

$$x_1 = I_t \qquad (۱۳)$$
$$I_t + x^1_{t+1,t+1} = d_{t+1}$$
$$x'^1_{k,k+1} = x^1_{k+1,k+1} \quad , k = t, \dots, j-1$$
$$x'^1_{k,k+2} = x^1_{k+1,k+2} = D \quad , k = t, \dots, j-2$$
$$x_2 = D - x'^1_{j-1,j} = D - x^1_{j,j} = I_j$$
$$x_3 = D$$

بنابراین، از آنجا که $I'_j = x_2 + x_3 = D + I_j$، با صدور یک سفارش مازاد به اندازه D، در دوره غیر فعال t، سطح موجودی انتهای دوره j به اندازه D واحد افزایش پیدا می‌کند که در دوره $j+1$ مصرف خواهد شد و همچنین، تمامی سفارشات در $[t,j]$ سفارش نامتعارف تبدیل می‌شوند.

فرض کنید، $\psi_i = \{k^i_1, k^i_2, \dots, k^i_{|\psi_i|}\}$ یک مجموعه مرتب است که تمامی دوره‌های j $(j \geq i)$ را نشان می‌دهد، به نحوی که، بازه‌های $[i,j]$ $(j \in \psi_i)$ بتوانند به صورت بخش A برنامه‌ریزی شوند. البته شرط $I_t > 0$ $(i \leq t < j)$ نادیده گرفته می‌شود. شرط مذکور در حین اجرای الگوریتم بررسی خواهد شد. طبیعتا، اگر $d_i > D$ باشد، خواهیم داشت $\psi_i = \emptyset$. با فرض یک دوره مفروض j $(j \in \psi_i)$، با توجه به تعریف بخش A، تمامی سفارشات مثبت در $[i,j]$ برابر با D هستند و همچنین شرط $I_j < d_{j+1}$ برقرار است. m^j_i را کمترین تعداد سفارشات به اندازه D در نظر می‌گیریم، به نحوی که تمامی تقاضاهای $[i,j]$ برآورده شوند. واضح است که کران پایین m^j_i برابر با $\left\lceil \frac{d^j_i}{D} \right\rceil$ است که در آن $d^j_i = \sum_{t=i}^{j} d_t$ تقاضای تجمعی از دوره i تا j است. به خاطر فسادپذیر بودن اقلام، این امکان وجود دارد که مقدار m^j_i بیشتر از کران پایین خود باشد. اکنون، فرض کنید که $W_0^{i,j}$ یک جواب جزئی با m^j_i سفارش به اندازه D باشد، به نحوی که تقاضاهای $[i,j]$ با کمترین هزینه برآورده شود. طبیعتا، با توجه به فرض ۲، تمامی m^j_i سفارش باید تا جایی که ممکن است در دورترین دوره‌ها صادر گردند. بنابراین، با فرض این‌که جواب جزئی W_0^{i,k^i_u} برنامه‌ریزی شده است، می‌توان به نحو زیر k^i_{u+1} را، اگر موجود باشد، مشخص کرده و جواب جزئی $W_0^{i,k^i_{u+1}}$ را با توجه به W_0^{i,k^i_u} برنامه‌ریزی کرد:

اگر یک سفارش به اندازه D در دوره $k^i_u + 1$ بعلاوه سطح موجودی انتهای W_0^{i,k^i_u} بتواند تقاضای دوره $k^i_u + 1$ را پوشش دهد، یک سفارش در $k^i_u + 1$ صادر می‌کنیم. در غیر این صورت، برای ساختن $W_0^{i,k^i_{u+1}}$ نیاز است که تعدای سفارش نامتعارف مازاد به اندازه D در آخرین دوره‌های غیرفعال W_0^{i,k^i_u} صادر کنیم. فرض کنید، جواب جزئی W_n^{i,k^i_u} با افزودن n سفارش نامتعارف مازاد به آخرین دوره‌های غیر فعال W_0^{i,k^i_u} ساخته شده است (اگر W_0^{i,k^i_u} حداقل n دوره غیرفعال داشته باشد). همچنین، I_n^{i,k^i_u} $\left(I_n^{i,k^i_u} < d_{k^i_u+1}\right)$ را سطح موجودی انتهای جواب جزئی W_n^{i,k^i_u} در نظر بگیرید. طبیعتا، W_n^{i,k^i_u} با افزودن یک سفارش مازاد به آخرین دوره غیر فعال W_{n-1}^{i,k^i_u}، قابل ساخت است. با توجه به فسادپذیر بودن کالا، لزوما صدور یک سفارش جدید در آخرین دوره غیر فعال W_n^{i,k^i_u}، سطح موجودی انتهای آن را به اندازه D واحد افزایش نمی‌دهد و ممکن است مقداری از کالا، در این بین، مجددا به فروش رسیده و مقداری کمتر از D به سطح موجودی انتهای W_n^{i,k^i_u} افزوده شود. بنابراین، داریم $I_{n-1}^{i,k^i_u} \leq I_n^{i,k^i_u} \leq I_{n-1}^{i,k^i_u} + D$. از آنجا که $I_0^{i,k^i_u} < d_{k^i_u+1}$، تمام I_0^{i,k^i_u} در دوره $k^i_u + 1$ مصرف می‌شود. بنابراین، هنگام ساختن $W_0^{i,k^i_{u+1}}$ از روی W_0^{i,k^i_u} یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

- $I_0^{i,k^i_u} + D \geq d_{k^i_u+1}$: در این حالت، واضح است که داریم:

$$k^i_{u+1} = \min\left\{T, \max\left\{t \,\middle|\, k^i_u < t < k^i_u + L, d^t_{k^i_u+1} \leq D + I_0^{i,k^i_u}\right\}\right\}$$

و یک سفارش جدید در دوره $k^i_u + 1$ بعلاوه سطح موجودی I_0^{i,k^i_u} تقاضاهای دوره‌ای k^i_u تا k^i_{u+1} را تامین می‌کنند. بنابراین، $W_0^{i,k^i_{u+1}}$ با افزودن دوره‌های k^i_u تا k^i_{u+1} به W_0^{i,k^i_u} و صدور یک سفارش به اندازه D در دوره $k^i_u + 1$ ساخته می‌شود.

- $I_0^{i,k^i_u} + D < d_{k^i_u+1}$ و W_0^{i,k^i_u} هیچ دوره غیر فعالی ندارد: طبیعتا، در این حالت k^i_u آخرین عضو مجموعه مرتب ψ_i است.

- $I_0^{i,k_u^i} + D < d_{k_u^i+1}$، $C/D < 2$، $I_1^{i,k_u^i} - I_0^{i,k_u^i} = D$: تمام تقاضای دوره $k_u^i + 1$ توسط یک سفارش در همان دوره قابل تامین نیست. با توجه به فرض ۱، داریم $I_0^{i,k_u^i} + 2D > I_0^{i,k_u^i} + C \geq d_{k_u^i+1}$. بنابراین، تقاضای $k_u^i + 1$ با صدور یک سفارش در آخرین دوره غیرفعال W_0^{i,k_u^i} و یک سفارش در $k_u^i + 1$ تامین خواهد شد. بنابراین، خواهیم داشت:

$$k_{u+1}^i = \min\left\{T, \max\left\{t \,\middle|\, k_u^i < t < k_u^i + L, d_{k_u^i+1}^t \leq D + I_1^{i,k_u^i}\right\}\right\}$$

و W_0^{i,k_{u+1}^i} با افزودن دوره‌های k_u^i تا k_{u+1}^i به W_1^{i,k_u^i} و صدور یک سفارش به اندازه D در دوره $k_u^i + 1$ ساخته می‌شود.

- $I_0^{i,k_u^i} + D < d_{k_u^i+1}$، $C/D < 2$، $I_1^{i,k_u^i} - I_0^{i,k_u^i} < D$، $I_1^{i,k_u^i} + D \geq d_{k_u^i+1}$: در این حالت نیز W_0^{i,k_{u+1}^i} همانند حالت سوم، ساخته می‌شود.

- $I_0^{i,k_u^i} + D < d_{k_u^i+1}$، $C/D < 2$، $I_1^{i,k_u^i} - I_0^{i,k_u^i} < D$، $I_1^{i,k_u^i} + D < d_{k_u^i+1}$: در این حالت، چون $I_1^{i,k_u^i} - I_0^{i,k_u^i} < D$ است، با در نظرگیری t به عنوان آخرین دوره غیرفعال W_0^{i,k_u^i}، با افزودن یک سفارش به t، تقاضای دوره $d_{k_u^i+1}$ تامین نشده و ضمنا، در بازه $[t, k_u^i]$ در W_1^{i,k_u^i} نیز فروش مجدد اکیدا مثبت اتفاق افتاده است. بنابراین، طبق لم ۱، افزودن سفارش مازاد دیگر، باعث تامین تقاضای $d_{k_u^i+1}$ نمی‌شود و k_u^i آخرین عضو مجموعه مرتب ψ_i است.

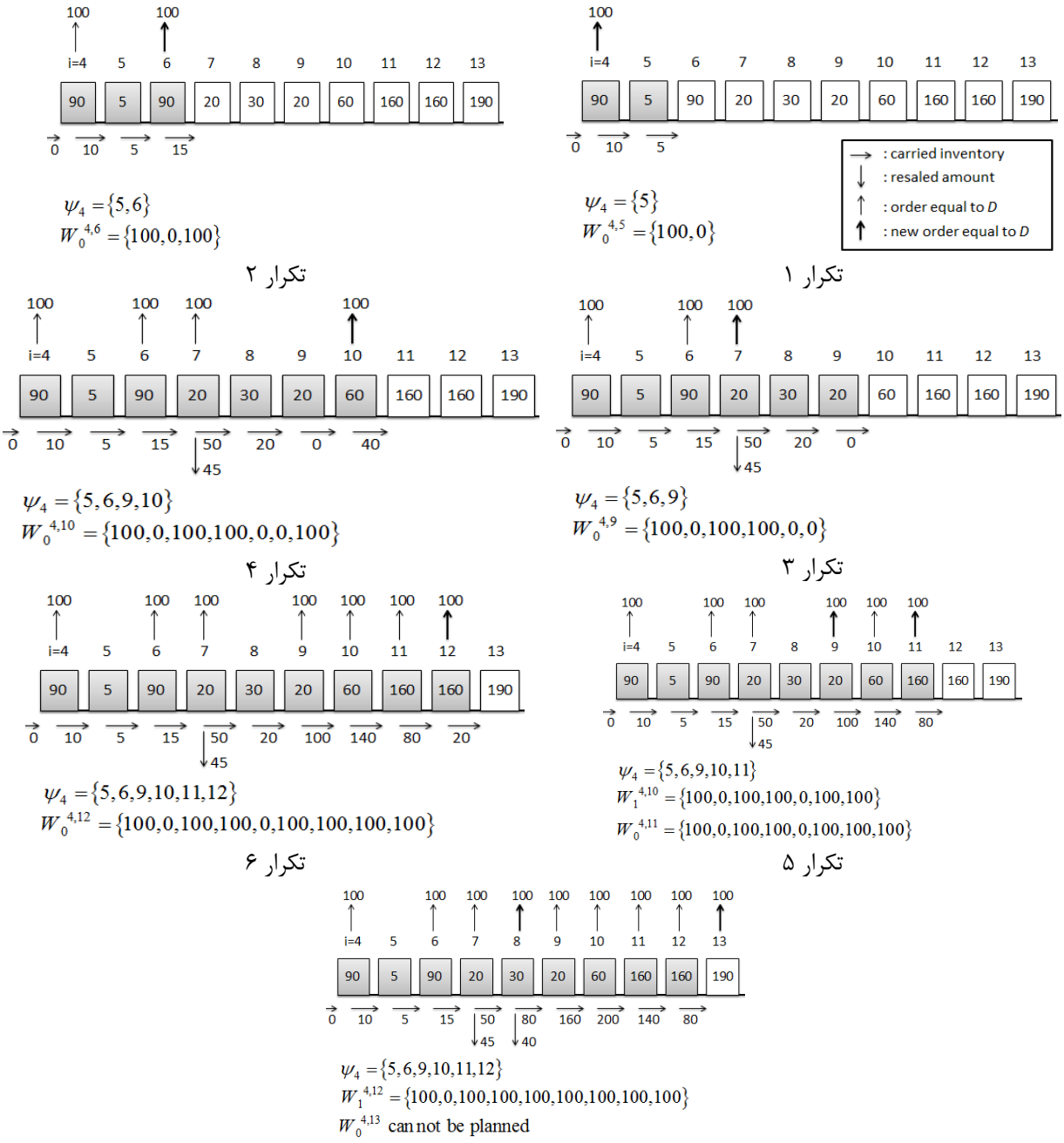
- $I_0^{i,k_u^i} + D < d_{k_u^i+1}$، $C/D \geq 2$: فرض کنید که W_0^{i,k_{u+1}^i} با افزودن دوره‌های $k_u^i + 1$ تا k_{u+1}^i به W_n^{i,k_u^i} $(n > 1)$ و صدور یک سفارش به اندازه D در $k_u^i + 1$ ساخته شده باشد. همچنین، فرض کنید جواب جزئی W، با حذف آخرین سفارش مازاد W_n^{i,k_u^i} و اضافه کردن دوره‌های $k_u^i + 1$ تا k_{u+1}^i به آن و صدور یک سفارش به اندازه $2D$ در دوره $k_u^i + 1$ ساخته شود. سطح موجودی انتهای W از سطح موجودی انتهای W_0^{i,k_{u+1}^i} کمتر نیست و هزینه کمتری هم دارد. بنابراین، جواب جزئی W_0^{i,k_{u+1}^i} نمی‌تواند در جواب بهینه مشارکت داشته باشد و k_u^i آخرین عضو مجموعه مرتب ψ_i است.

بنابراین، با فرض $\psi_i = \emptyset$ و با شروع از دوره مفروض i، می‌توان مجموعه ψ_i را طی چندین تکرار ساخت. مثالی برای توضیح بیشتر این فرآیند آورده شده است که در **شکل ۳** قابل مشاهده است. همچنین، با توجه به مباحث مطرح شده در فوق، به راحتی ویژگی‌های زیر استخراج می‌شود. ویژگی ۵ از حالات ۴، ۳، ۱ و ۵ و ویژگی ۶ از وضعیت‌های ۱ و ۶ منتج شده‌اند.

ویژگی ۵: با درنظرگیری بازه $[i, k_u^i]$ $(k_u^i \in \psi_i, u \geq 2)$ به عنوان بخش **A** در جواب بهینه، اگر $C/D < 2$ باشد، نامساوی $m_i^{k_v^i} - m_i^{k_{v-1}^i} \leq 2$ باید به ازای هر $v, (2 \leq v \leq u)$ صدق کند.

ویژگی ۶: با درنظرگیری بازه $[i, k_u^i]$ $(k_u^i \in \psi_i, u \geq 2)$ به عنوان بخش **A** در جواب بهینه، اگر $C/D \geq 2$ باشد، نامساوی $m_i^{k_v^i} - m_i^{k_{v-1}^i} \leq 1$ باید به ازای هر $v, (2 \leq v \leq u)$ صدق کند.

توضیح **شکل ۳** در ادامه آورده شده است. از آنجا که قصد داریم تمامی بخش Aهایی را که از دوره ۴ شروع می‌شوند، برنامه‌ریزی کنیم، در ابتدا قرار می‌دهیم $\psi_4 = \emptyset$. تکرارهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶ واضح هستند. در تکرار ۵، تقاضای دوره ۱۱ با یک سفارش در دوره ۱۱ قابل ارضا نیست، بنابراین، یک سفارش مازاد در دوره ۹ صادر شده است. در تکرار ۷ نیز همین وضعیت برای دوره ۱۳ برقرار است. با این تفاوت که، سفارش مازاد صادر شده در دوره ۸ نمی‌تواند باعث تامین تقاضای دوره ۱۳ شود و همچنین، فروش مجدد نیز اتفاق می‌افتد و با توجه به لم ۱، در نتیجه، دیگر عضو جدیدی به ψ_4 اضافه نمی‌شود. مضافا، از آنجا که در $W_0^{4,10}$ موجودی انتهای دوره ۹ برابر با صفر است، جواب جزئی مذکور نمی‌تواند به عنوان بخش A در جواب بهینه شرکت کند. این شرط در حین اجرای الگوریتم ارائه شده، بررسی می‌شود.



شکل ۳. یک مثال برای بخش A: $i=4, D=100, L=3$.

Figure 3. An example for Section A: $i=4, D=100, L=3$.

ویژگی ۷: اگر $C/D<2$ باشد، حداکثر دو سفارش مازاد در بخش A از جواب بهینه مسئله CLSP1DP وجود دارد.

اثبات : فرض کنید بازه $[i,j]$ $(j\in\psi_i)$ به عنوان بخش A در جواب بهینه، با ساختار $W_n^{i,j}$ $(n>2)$ برنامه‌ریزی شده است. بنابراین، داریم $I_n^{i,j}<d_{j+1}$ همچنین، واضح است که $j<T$ است. زیرا، در غیر اینصورت، بازه $[i,T]$ انتهای بازه بازتولید است و چون جواب جزئی $W_0^{i,T}$ تمامی تقاضاهای بازه را پوشش می‌دهد، صدور سفارشات مازاد در تناقض با بهینگی است. با فرض $j<T$ ، اضافه کردن دو سفارش مازاد به $W_0^{i,j}$ باعث اتفاق افتادن فروش مجدد نشده است. زیرا، در غیر اینصورت، بنا به لم ۱، اضافه کردن سفارشات مازاد بعدی موجودی انتهای بخش را تغییر نمی‌داد. بنابراین، خواهیم داشت $I_n^{i,j}>I_0^{i,j}+2D$. و در نتیجه، از آنجا که $C/D<2$ است، با توجه به فرض ۱، خواهیم داشت، $I_n^{i,j}>I_0^{i,j}+C\geq d_{j+1}$، که در تناقض با فرض است.

ویژگی ۸: اگر $C/D \geq 2$ باشد، حداکثر یک سفارش مازاد در بخش A از جواب بهینه مسئله CLSP1DP وجود دارد.

اثبات: فرض کنید بازه $[i,j]$ $(j \in \psi_i)$ به عنوان بخش A در جواب بهینه، با ساختار $W_n^{i,j}$ $(n>1)$ برنامه‌ریزی شده است. واضح است که آخرین دوره $W_n^{i,j}$ غیرفعال نیست. فرض کنید، جواب جزئی W با حذف یکی از سفارشات مازاد $W_n^{i,j}$ و اضافه کردن D واحد به سفارش صادر شده در دوره j ساخته شده باشد. سطح موجودی انتهای W از سطح موجودی انتهای $W_n^{i,j}$ کمتر نیست و هزینه W کمتر است. بنابراین، فرض بهینگی نقض می‌شود و $W_n^{i,j}$ نمی‌تواند به عنوان بخش A در جواب بهینه مشارکت کند.

بازه $[t,j]$ را در نظر بگیرید، به نحوی که $Q_k = D$ $(k = t+1, \dots, j)$ و دوره t غیرفعال باشد. الگوریتم ۱ برای این طراحی شده است که، با توجه به سیاست مصرف FIFO، مقدار درآمد از فروش مجدد و همچنین، سطح موجودی انتهای بازه را، زمانی که یک سفارش نامتعارف در دوره t صادر شود، محاسبه کند. خروجی الگوریتم Rev_{RS}، $EndInv$، per_{RS} و per_{ig} است، که به ترتیب، نشان‌دهنده درآمد از فروش مجدد، سطح موجودی انتهای بازه، آخرین دوره با فروش مجدد اکیدا مثبت و آخرین دوره با سفارش نامتعارف، بعد از اضافه کردن یک سفارش به اندازه D به دوره t، است. اگر فروش مجددی اتفاق نیافتد per_{RS} مقدار صفر خواهد گرفت. طبیعتا، اگر قبل از اضافه کردن سفارش جدید در دوره t، بدانیم که در $[t+1,j]$ فروش مجدد اتفاق افتاده، با توجه به لم ۱، اضافه کردن سفارش جدید در دوره t مجاز نیست. همچنین، اگر تمامی سفارشات $[t+1,j]$ متعارف باشند، با توجه به لم ۲، نتیجه اضافه کردن سفارش جدید بدیهی است. در غیر این صورت، با در نظرگیری inv به عنوان موجودی انتهای دوره t، از **الگوریتم ۱** استفاده خواهد شد.

نحوه عملکرد **الگوریتم ۱** در ادامه توضیح داده شده است. این الگوریتم با هدف محاسبه دقیق تغییرات موجودی پایان دوره و درآمد حاصل از فروش مجدد پس از صدور یک سفارش نامتعارف به میزان D در دوره t طراحی شده است. پیاده‌سازی این شبه‌کد در سه فاز اصلی انجام می‌پذیرد:

- فاز تخصیص موجودی اولیه: در ابتدا موجودی اولیه inv برای تأمین تقاضای دوره‌های آتی $t+1$ تا j بر اساس مکانیسم مصرف FIFO تخصیص می‌یابد و تقاضای تعدیل‌شده در هر دوره (d'_k) محاسبه می‌شود.
- فاز شبیه‌سازی مصرف بر اساس عمر مفید (L): الگوریتم دوره‌های سفارش‌دهی را پیمایش کرده و مقادیر سفارش $Q_k = D$ را جهت پوشش تقاضاهای باقی‌مانده d'_k در بازه عمر مفید کالا $[k, k+L-1]$ مصرف می‌کند.
- فاز محاسبه فروش مجدد: اگر پس از پایان عمر مفید کالا در دوره $k+L-1$ هنوز مقداری از سفارش Q_k باقی مانده باشد و امکان مصرف آن وجود نداشته باشد، این مقدار مازاد به عنوان کالای فروش‌رفته مجدد تلقی شده و درآمد حاصله بر اساس نرخ تنزیل $(1-\beta)p_k$ محاسبه و متغیر per_{RS} (آخرین دوره فروش مجدد) به‌روزرسانی می‌شود.

الگوریتم ۱. محاسبه درآمد از فروش مجدد و سطح موجودی انتهای بخش، بعد از صدور یک سفارش نامتعارف

(Input: t, j, inv)
(Output: $Cost_{RS}, EndInv, per_{RS}, per_{irg}$)

$Cost_{RS} = 0, per_{RS} = 0, per_{irg} = 0$
$d'_k = d_k$, for all k $(t < k \leq j)$;
$Q_k = D$,for all k $(t \leq k \leq j)$
$d'_t = 0, k = t+1$
While $inv > 0$ and $k \leq j$ Do
    $tmp = \min\{d'_k, inv\}$
    $d'_k = d'_k - tmp$
    $inv = inv - tmp$
    $k = k+1$
End While
If $k > j$ Then
    $EndInv = inv + D$
    $per_{irg} = j$
    Break

End If

For $k = t$ to $k = j$ Do

  If $d'_k = 0$ Then $per_{irg} = k$

  For $i = k$ to $i = \min\{j, k + L - 1\}$ Do

    $tmp = \min\{d'_i, Q_k\}$

    $d'_i = d'_i - tmp$

    $Q_k = Q_k - tmp$

    If $Q_k = 0$ Then Break For

  End For

  If $Q_k > 0$ and $j \geq k + L - 1$ Then

    $Rev_{RS} = Rev_{RS} + (1 - \beta)p_k Q_k$

    $per_{RS} = k, Q_k = 0$

  End If

End For

$$EndInv = \sum_{k=t}^{k=j} Q_k$$

الگوریتم ۲. با توجه به ویژگی‌های ۵ تا ۸ و لم‌های ۱ و۲ طراحی شده تا هزینه تمامی بخش‌های A را که از دوره مفروض i شروع می‌شوند، محاسبه کرده و همچنین، مجموعه مرتب ψ_i را نیز تشکیل دهد. نمادهای استفاده شده در الگوریتم ۲ به قرار زیر است:

$H_n(i,k), n = 0,1,2$ هزینه جواب جزئی $W_n^{i,k}$

$G_n^A(i,k), n = 0,1,2$ هزینه جواب جزئی $W_n^{i,k}$، اگر جواب مذکور با توجه به شرط اکیدا مثبت بودن دوره‌های داخل بازه، کاندیدای حضور در جواب بهینه باشد

R مجموعه مرتب نشان‌دهنده دوره‌های غیر فعال

K مجموعه مرتب نشان‌دهنده سطح موجودی انتهای دوره‌های غیر فعال

f_x^k k-امین عنصر مجموعه مرتب x

$L_n^{RS}, n = 0,1$ آخرین دوره با فروش مجدد اکیدا مثبت در $W_n^{i,k}$. در صورتی که فروش مجدد اتفاق نیافتاده باشد، نماد مقدار صفر می‌گیرد.

$L_n^{Zero}, n = 0,1$ اولین دوره با سطح موجودی انتهای دوره صفر در $W_n^{i,k}$. در صورتی که چنین دوره‌ای موجود نباشد، نماد مقدار صفر می‌گیرد.

$L_n^{irg}, n = 0,1$ آخرین دوره با سفارش نامتعارف در $W_n^{i,k}$. در صورتی که چنین دوره‌ای موجود نباشد، نماد مقدار صفر می‌گیرد.

I سطح موجودی ابتدای دوره دوره فعلی

RS مقدار فروش مجدد در دوره فعلی

الگوریتم ۲ با مقادیر مجازی اولیه $I_0^{i,i-1}$، $H_0(i,i-1)$ و $H_1(i,i-1)$، که همگی برابر با صفر هستند، شروع به کار می‌کند. این نمادها، صرفا برای راحتی نوشتن الگوریتم، تعریف شده‌اند و باعث می‌شوند برای نوشتن تکرار اول،گام‌های مجزا نیاز نباشد.

نحوه عملکرد **الگوریتم ۲** در ادامه توضیح داده شده است. این الگوریتم ارزیابی و محاسبه هزینه تمام بخش‌های کاندید A که از دوره i آغاز می‌شوند را بر عهده دارد. ساختار پیاده‌سازی این الگوریتم شامل گام‌های زیر است:

۱) حلقه اصلی پیمایش دوره‌ها ($k \leq T$): با شروع از دوره i، میزان موجودی قابل دسترس بررسی می‌شود. بر اساس مقایسه موجودی با سطح شکست تخفیف D و نسبت C/D، حالت‌های مختلف صدور سفارش متعارف یا نامتعارف تعیین می‌گردد.

۲) به‌روزرسانی موجودی و هزینه‌ها: پس از کسر تقاضای دوره جاری، هزینه‌های نگهداری ($h_k I$) و هزینه‌های صدور سفارش به هزینه کل ($Cost$) اضافه می‌شود. همچنین دوره‌های بدون سفارش و موجودی انتهای آن‌ها، به ترتیب، در مجموعه‌های مرتب در مجموعه مرتب R و K ذخیره می‌گردند.

۳) ارزیابی سفارش‌های نامتعارف مازاد (بر اساس ویژگی‌های ۵ تا ۸): در صورت وجود دوره‌های غیرفعال ($R \neq \emptyset$)، الگوریتم بر اساس شرایط دامنه نسبت ظرفیت به تخفیف ($C/D < 2$ یا $C/D \geq 2$)، صدور سفارش‌های نامتعارف اول و دوم را ارزیابی کرده و در صورت نیاز با فراخوانی الگوریتم ۱، مقادیر خروجی شامل $EndInv$ و Rev_{RS} را جهت به‌روزرسانی هزینه‌ها (H_1 و H_2) و موجودی‌ها (I_1 و I_2) به کار می‌گیرد.

الگوریتم ۲. محاسبه هزینه بخش A در مسئله CLSP1DP

(Input: i)
(Output: $\psi_i, G_n^A(i,k), I_n^{i,k}, \quad k \in \psi_i, n = 0,1,2$)

$R = \emptyset, K = \emptyset, \psi_i = \emptyset$
$L_n^{RS} = 0, L_n^{Zero} = 0, L_n^{irg} = 0, (\text{for } n = 0,1)$
$I = 0,\ k = i,\ I_0^{i,i-1} = 0,\ I_1^{i,i-1} = 0,\ H_0(i,i-1) = 0, H_1(i,i-1) = 0$
While $k \le T$ Do
  If $I_0^{i,k-1} + D \ge d_k$ Then
    $I = I_0^{i,k-1} + D$
    $Cost = H_0(i,k-1) + S_k + D.P_k(D)$
  ElseIf $I_1^{i,k-1} + D \ge d_k$ and $C/D < 2$ Then
    $I = I_1^{i,k-1} + D$
    $Cost = H_1(i,k-1) + S_k + D.P_k(D)$
    $L_0^{RS} = L_1^{RS}, L_0^{Zero} = L_1^{Zero}, L_0^{irg} = L_1^{irg}, \quad R = R - f_R^{|R|}, R = K - f_k^{|K|}$
  Else Break Algorithm
  End If
  If $I > d_k^{\min\{T,k+L-1\}}$ Then
    $RS = I - d_k^{\min\{T,k+L-1\}},\ I = I - RS,\ L_0^{RS} = k$
    $Cost = Cost - RS.(1-\beta)p_k$
  End If
  $k' = k$
  While $I \ge d_k$ Do
    $I = I - d_k$
    If $k > k'$ Then $R = R \cup \{k\}, K = K \cup \{I\}$
    $Cost = Cost + h_k I$
    If $I = 0$ and $L_0^{Zero} = 0$ Then $L_0^{Zero} = k$
  End While
  $k = k - 1$
  $H_0(i,k) = Cost, I_0^{i,k} = I$
  If $k < T$ or $\left(k = T \text{ and } I_0^{i,k} = 0\right)$ Then $\psi_i = \psi_i \cup \{k\}$
  If $(L_0^{Zero} = 0 \text{ or } L_0^{Zero} = k)$ and $\Big(k < T \text{ or } \left(k = T \text{ and } I_0^{i,k} = 0\right)\Big)$ Then
    $G_0^A(i,k) = H_0(i,k)$
  Else $G_0^A(i,k) = \infty$
  End If
  If $R \ne \emptyset$ and $k < T$ Then
    If $L_0^{irg} < f_R^{|R|}$ Then
      $H_1(i,k) = H_0(i,k) + S_{f_R^{|R|}} + D\left(P_{f_R^{|R|}}(D) + h^k_{f_R^{|R|}}\right)$
      $I_1^{i,k} = I_0^{i,k} + D, L_1^{irg} = k, L_1^{RS} = L_0^{RS}$
      If $L_0^{Zero} \ge f_R^{|R|}$ Then $L_1^{Zero} = 0$ Else $L_1^{Zero} = L_0^{Zero}$
      If $L_1^{Zero} = 0$ and $I_1^{i,k} < d_{k+1}$ Then $G_1^A(i,k) = H_1(i,k)$ Else $G_1^A(i,k) = \infty$
    ElseIf $L_0^{RS} < f_R^{|R|}$ Then
      Execute Algorithm 1:
        Inputs: $(t \leftarrow f_R^{|R|}, j \leftarrow k, inv \leftarrow f_K^{|K|})$
        Outputs: $(Rev_{RS},\ EndInv,\ per_{RS},\ per_{irg})$
      $H_1(i,k) = H_0(i,k) + S_{f_R^{|R|}} + D.P_{f_R^{|R|}}(D) + h^k_{f_R^{|R|}}(EndInv - I_0^{i,k}) - Rev_{RS}$
      $I_1^{i,k} = EndInv, \quad L_1^{irg} = per_{irg}, \quad L_1^{RS} = per_{RS}$
      If $L_0^{Zero} \ge f_R^{|R|}$ Then $L_1^{Zero} = 0$ Else $L_1^{Zero} = L_0^{Zero}$
      If $L_1^{Zero} = 0$ and $I_1^{i,k} < d_{k+1}$ Then $G_1^A(i,k) = H_1(i,k)$ Else $G_1^A(i,k) = \infty$
    Else $G_1(i,k) = \infty$
    End If
    If $|R| > 1$ and $I_1^{i,k} - I_0^{i,k} = D$ and $I_1^{i,k} < d_{k+1}$ and $C/D < 2$
      Execute Algorithm 1:
        Inputs: $(t \leftarrow f_R^{|R|-1},\ j \leftarrow k,\ inv \leftarrow f_K^{|K|-1})$
        Outputs: $(Rev_{RS},\ EndInv,\ per_{RS},\ per_{irg})$
      $H_2(i,k) = H_1(i,k) + S_{f_R^{|R|-1}} + D.P_{f_R^{|R|-1}}(D) + h^k_{f_R^{|R|-1}}(EndInv - I_1^{i,k}) - Rev_{RS}$
      $I_2^{i,k} = EndInv$
      If $\left(L_1^{Zero} \ge f_R^{|R|-1} \text{ or } L_1^{Zero} = 0\right)$ and Then $I_2^{i,k} < d_{k+1}$
        $G_2^A(i,k) = H_2(i,k)$
      Else $G_2^A(i,k) = \infty$
      End If
    Else $G_2^A(i,k) = \infty$
    End If
  Else $G_1^A(i,k) = G_2^A(i,k) = \infty$
  End If

$k = k + 1$
End While

۴-۲- بررسی بخش B

بازه مفروض $[k,l]$ را به عنوان بخش B در نظر بگیرید. بنابراین، تمامی سفارشات اکیدا مثبت برابر با C هستند، سطح موجودی انتهای بخش اکیدا مثبت است و آخرین سفارش مثبت قبل از k (اگر وجود داشته باشد) برابر با D است.همچنین، داریم $I_l < d_{l+1}$ و فروش مجدد و سفارش نامتعارفی در بازه مذکور وجود ندارد. اگر سطح موجودی در ابتدای بازه، اکیدا مثبت باشد، این بازه بعد از یک بخش A با ساختار $W_0^{i,k-1}$ قرار دارد که در آن، i دوره شروع در بازه بازتولیدی هست که بازه $[k,l]$ در آن قرار دارد. اگر $[k,l]$ یک بازه LZ باشد، دوره k، دوره شروع یک بازه بازتولید است.

مجموعه مرتب $\eta_{n,i,k}$ را، مجموعه شامل تمامی دوره‌های $l\ (l \geq k)$ در نظر بگیرید که بازه $[k,l]$ $(k-1 \in \psi_i, l \in \eta_{n,i,k})$ را بتوان به عنوان بخش B برنامه‌ریزی کرد. اگر k اولین دوره یک بازه بازتولید باشد، داریم $i = 0$ و همچنین، $\psi_0 = \{0, \dots, T-1\}$. در غیر اینصورت، بازه $[k,l]$ بعد از یک بخش A با ساختار $W_n^{i,k-1}$ قرار دارد. فرض کنید، $G_n^B(i,k,l)$، نشان‌دهنده هزینه $[k,l]$ باشد؛ اگر $[k,l]$ بتواند به عنوان بخش B بعد از یک بخش A با ساختار $W_0^{i,k-1}$، در جواب بهینه، حضور داشته باشد. همچنین، $G_n^B(0,k,l)$ به هزینه متناظر با $[k,l]$، با سطح موجودی اولیه صفر، اشاره دارد. **الگوریتم ۳**، طراحی شده است تا بتواند هزینه تمامی بخش‌های B را که از دوره مفروض k شروع می‌شوند و سطح موجودی در ابتدای بخش برابر با صفر یا $I_n^{i,k-1}$، حساب کند. فرض کنید، II_n^{ikl} نشان‌دهنده سطح موجودی انتهای $[k,l]$ باشد؛ اگر بازه مذکور بعد از $W_n^{i,k-1}$ قرار دارد. همچنین، فرض کنید، II^{kl} سطح موجودی $[k,l]$ باشد؛ اگر $[k,l]$ از نوع LZ است. بنابراین، خواهیم داشت:

$$II_n^{ikl} = I_n^{i,k-1} + C\left\lceil \frac{d_k^l - I_n^{i,k-1}}{C} \right\rceil - d_k^l$$

و

$$II^{kl} = C\left\lceil \frac{d_k^l}{C} \right\rceil - d_k^l.$$

گام‌های **الگوریتم ۳** ساده هستند. به صورت تکراری یک سفارش به اندازه C صادر می‌شود و تا جایی که عمر سفارش اجازه می‌دهد، موجودی رو به جلو منتقل شده و مصرف می‌شود. در حالتی که فروش مجدد اتفاق بیافتد و یا سطح موجودی انتهای دوره صفر شود، الگوریتم متوقف می‌شود.

الگوریتم ۳. محاسبه هزینه بخش **B** در مسئله CLSP1DP

(Input: $n, i, k, (k-1 \in \psi_i), I_n^{i,k-1}$)
(Output: $\eta_{n,i,k}, G_n^B(i,k,l), \quad k \in \eta_{n,i,k}, n = 0,1,2$)

If $i = 0$ or $k = 1$ Then $I = 0$ Else $I = I_n^{i,k-1}$
If $i > 0$ and $I = 0$ Then Break Algorithm
$l = k, Cost = 0, \eta_{n,i,k} = \emptyset$
While $l < T$ Do
  If $I + C \geq d_l^{\min\{T-1, l+L-1\}}$ Then Break Algorithm
  $I = I + C, Cost = Cost + Pl_l(C)$
  While $I > d_l$ and $l < T$ Do
    $I = I - d_l$
    $Cost = Cost + h_l I$
    $l = l + 1$
  End While
  $l = l - 1$
  If $I > 0$ Then
    $G_n^B(i,k,l) = Cost, \eta_{n,i,k} = \eta_{n,i,k} \cup \{l\}$
    $l = l + 1$
  Else Break Algorithm
  End If
End While

۴-۳- بررسی بخش C

بازه مفروض $[l,j]\ (1 \leq l \leq j)$ را در نظر بگیرید به طوری که بازه مذکور RZ است، دوره l یا ناقص است و یا سفارشی برابر با C در آن صادر شده و همچنین، سایر سفارشات اکیدا مثبت، در صورت وجود، برابر با C هستند. بنابراین، سطح وجودی اول دوره $t\ (1 < t \leq j)$ را می‌توان با $fr_{t,j}$، که از رابطه (۱۴) به دست می‌آید، نشان داد.

$$fr_{t,j} = mod\left(d_t^j, C\right) \qquad (۱۴)$$

با در نظرگیری inv به عنوان سطح موجودی اول دوره l، داریم $inv < d_l$ و همچنین، سفارشی به اندازه $Q_l = fr_0^{l+1,j} - inv + d_l$، در دوره l صادر می‌شود. در صورتی که $l = j$ باشد، فرض می‌کنیم $fr_{l+1,j} = 0$. مشخص است که $Q_l \leq C$، یک شرط لازم برای این است که $[l,j]$ بتواند به عنوان بخش C در جواب بهینه حضور

داشته باشد. این شرط، هنگام ساختن گراف مسئله کوتاه‌ترین مسیر بررسی می‌شود. فرض کنید، $H^C(l,j)$ نشان‌دهنده هزینه $[l,j]$ باشد. همچنین، فرض کنید، $G^C(l,j)$ نشان‌دهنده هزینه $[l,j]$ باشد؛ با این تفاوت که هزینه سفارش دوره l، که ممکن است ناقص باشد، نادیده گرفته شده است. این هزینه در حین ساختن گراف مسئله کوتاه‌ترین مسیر، لحاظ خواهد شد. **الگوریتم ۴**، هزینه تمامی بخش‌های C را که در دوره j پایان می‌یابند، بدون در نظر گرفتن هزینه سفارش اولین دوره بخش، محاسبه می‌کند. در **الگوریتم ۴**، متغیر صفر و یک flg نشان می‌دهد که در دوره فعلی سفارشی به اندازه C صادر شده است یا نه.

الگوریتم ۴. محاسبه هزینه بخش **C** در مسئله CLSP1DP

(Input: j)
(Output: $G^C(l,j), 1 \le l \le j$)

$H^C(l,j) = G^C(l,j) = \infty$, For all l $(1 \le l \le j)$
$G^C(j,j) = 0$
If $d_j < C$ Then $H^C(j,j) = 0$ Else $H^C(j,j) = Pl_j(C)$
$flg = 0, cnt = 1$
For $l = j-1$ Down To $l = 1$ Do
  If $flg = 1$ Then $cnt = 1$
  $cnt = cnt + 1$
  If $cnt > L$ Then Break Algorithm
  If $fr_0^{l,j} \ge d_l$ Then
    $flg = 0$
    $H^C(l,j) = H^C(l+1,j) + h_l fr_{l+1,j}$
    $G^C(l,j) = H^C(l,j)$
  Else
    $flg = 1$
    $H^C(l,j) = H^C(l+1,j) + h_l fr_0^{l+1,j} + Pl_l(C)$
    $G^C(l,j) = H^C(l+1,j) + h_l fr_0^{l+1,j}$
  End If
  If $fr_0^{l+1,j} = 0$ Break Algorithm
End For

۵- ارائه یک الگوریتم شمارش ضمنی برای مسئله CLSP1DP

فرض کنید، $pl_t(Q) = S_t + Q.P_t(Q)$ و $\Pi_\sigma^{ij}, (\sigma \in \{\text{ABC, AC, A, BC, C}\})$، به ترتیب، هزینه سفارش Q و کمترین هزینه بازه $[i,j]$ باشد؛ اگر بازه مذکور به صورتِ توالی σ برنامه‌ریزی شود. با توجه به بخش‌های ۴-۱ تا ۴-۳، مقادیر Π_σ^{ij}، توسط روابط زیر به دست می‌آید:

$$\Pi_{\mathbf{A}}^{ij} = \begin{cases} G_0^A(i,j) & , j \in \psi_i, I_0^{i,j} = 0 \\ \infty & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (۱۵)$$

$$\Pi_{\mathbf{C}}^{ij} = \quad (۱۶)$$
$$\begin{cases} G^C(i,j) + Pl_i\left(fr_0^{i+1,j} + d_i\right) & , fr_i^{i+1,j} + d_i \\ \infty & , \text{otherv} \end{cases}$$

$$\Pi_{\mathbf{AC}}^{ij} = \min_{\substack{(k,n) \\ i<k\le j; n=0,1,2 \\ k-1\in\psi_i \\ fr_0^{k+1,j} - I_n^{i,k-1} + d_k \le C}} \left\{G_n^A(i,k-1) + G^C(k,j) + Pl_k\left(fr_0^{k+1,j} - I_n^{i,k-1} + d_k\right)\right\} \quad (۱۷)$$

$$\Pi_{\mathbf{BC}}^{ij} = \min_{\substack{(k,n) \\ i<k\le j \\ k-1\in\eta_{0,0,i} \\ fr_0^{k+1,j} - II^{i,k-1} + d_k < C}} \left\{G_0^B(0,i,k-1) + G^C(k,j) + Pl_k\left(fr_0^{k+1,j} - II^{i,k-1} + d_k\right)\right\} \quad (۱۸)$$

$$\Pi_{\mathbf{ABC}}^{ij} = \min_{\substack{(k,l,n) \\ i<k<l\le j; n=0,1,2 \\ k-1\in\psi_i . l-1\in\eta_{n,i,k} \\ fr_0^{l+1,j} - II_n^{ik,l-1} + d_l < C}} \left\{G_n^A(i,k-1) + G_n^B(i,k,l-1) + G^C(l,j) + Pl_l\left(fr_0^{l+1,j} - II_n^{i,k,l-1} + d_l\right)\right\} \quad (۱۹)$$

در ادامه، مقدار λ_i^j توسط رابطه (۲۰) به دست می‌آید.

$$\lambda_i^j = \min_{\sigma\in\{\boldsymbol{ABC,AC,A,BC,C}\}} \left\{\Pi_Y^{ij}\right\} \quad (۲۰)$$

زمانی که مقادیر λ_i^j برای تمامی زوج های $(i,j), i \le j$ محاسبه شد، مسئله CLSP1DP را می‌توان به مسئله کوتاه‌ترین مسیر تبدیل کرد. گراف جهت‌دار $G = (V,E)$ را با گره‌های $V = \{1, \dots, T+1\}$ و کمان‌های $E = \{(i,j+1) | 1 \le i \le j \le T\}$ در نظر بگرید. طول کمان $(i,j+1) \in E$ در گراف G برابر با λ_i^j است. کوتاه‌ترین مسیر از گره ۱ به گره $T+1$، جواب بهینه مسئله CLSP1DP است. ما الگوریتم شمارش ضمنی ارائه شده در این پژوهش را به اختصار IEA می‌نامیم.

قضیه ۳: الگوریتم IEA با پیچیدگی زمانی $O(T^4)$ مسئله CLSP1DP را حل می‌کند.

اثبات: الگوریتم ۱ در زمان $O(LT)$ اجرا می‌شود. بنابراین، برای دوره مفروض i، برای همه دوره‌های j $(j \ge i)$ مقادیر $G_n^A(i,j), i \le j, n = 0,1,2$، در بدترین حالت، در زمان $O(LT^2)$ محاسبه می‌شوند. پس، تمامی مقادیر

$G_n^A(i,j)$ در زمان $O(LT^3)$ قابل محاسبه هستند. برای هر زوج $(i,k), i \le k$، برای تمامی دوره‌های $l\ (l \ge k)$ مقادیر $G_n^B(i,k,l), n = 0,1,2$ در زمان $O(T)$ قابل محاسبه است. بنابراین، تمامی مقادیر $G_n^B(i,k,l)$ در زمان $O(T^3)$ محاسبه می‌شوند. برای دوره مفروض j و تمامی دوره‌های $i\ (i \le j)$، مقادیر $G^C(i,j)$ با پیچیدگی زمانی $O(T)$ قابل محاسبه است. درنتیجه، تمامی مقادیر $G^C(i,j)$ در زمان $O(T^2)$ حساب می‌شوند. خاطرنشان می‌کنیم که تمامی مقادیر فوق، قبل از ساخت گراف، فقط یکبار محاسبه می‌شوند و بیشترین پیچیدگی زمانی برای آن‌ها $O(LT^3)$ است. بیشترین پیچیدگی زمانی برای محاسبه λ_i^j به محاسبات مربوط به $\beta_{\mathbf{ABC}}^{ij}$ اختصاص دارد که برابر با $O(T^2)$ است. بنابراین، پس از انجام محاسبات اولیه با پیچیدگی $O(LT^3)$، برای یک زوج مفروض $i\ (i \le j)$، مقدار λ_i^j در زمان $O(T^2)$ حساب شده و در نتیجه، گراف مسئله کوتاه‌ترین مسیر با پیچیدگی زمانی $O(T^4)$ ساخته می‌شود که بر پیچیدگی زمانی $O(LT^3)$ (مربوط به محاسباتِ اولیه که تنها یک بار قبل از شروع به ساخت گراف انجام می‌شوند) و همچنین بر پیچیدگی زمانی حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر (به طور نمونه الگوریتم دایکسترا با پیچیدگی زمانی $O(T^2)$) غلبه دارد. در نتیجه، الگوریتم IEA مسئله CLSP1DP را با پیچیدگی زمانی $O(T^4)$ حل می‌کند.

۶- نتایج عددی

در این بخش، با تولید نمودهای تصادفی، عملکرد الگوریتم ارائه شده را در قیاس با حل‌کننده سیپلکس، که مدل ریاضی مسئله CLSP1DP را حل می‌کند، مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌دهیم. الگوریتم IEA در Visual C++ 2012 کد شده و مدل ریاضی با حل‌کننده سیپلکس در نرم‌افزار GAMS 14.1.2 حل شده است. همچنین، هم الگوریتم و هم GAMS در رایانه 2.13 GHz Intel Core i3, 4Gb RAM در سیستم عامل Windows7, 32bit اجرا شده‌اند. در نمودهای تولیدشده، تعداد دوره‌ها از $T = 10$ شروع شده و با افزایش ۲۰ دوره‌ای به $T = 330$ می‌رسد. تقاضاها، هزینه‌های نگهداری، قیمت خرید بدون تخفیف واحد کالا، عمر مفید و هزینه ثابت سفارش‌دهی، همگی توسط توزیع یکنواخت گسسته تولید شده‌اند. برای تولید هزینه ثابت سفارش‌دهی و قیمت خرید بدون تخفیف واحد کالا در هر نمود، به منظور ارضای مسئله، اعداد بعد از تولید به صورت غیر صعودی مرتب شده‌اند. مقادیر/ پارامترهای توزیع مربوط به هر پارامتر در **جدول ۲** قابل مشاهده است. مقادیر پارامترهای ظرفیت، تقاضا و هزینه‌های ثابت سفارش‌دهی و نگهداری و بازه‌های توزیع آن‌ها در **جدول ۲**، با اقتباس از مطالعات پیشین استاندارد در این حوزه (از جمله، ملکیان و همکاران (Malekian et al., 2021) انتخاب شده‌اند. برای طول عمر کالا و نرخ‌های تخفیف و تنزیل نیز مقادیر عرف در نظر گرفته شده است. به‌منظور ایجاد تنوع کافی در نسبت ظرفیت به سطح تخفیف (C/D) در چهار کلاس مختلف (**جدول ۳**) تنظیم شده‌اند تا رفتار الگوریتم در مواجهه با شرایط مختلف محیطی به دقت تحلیل شود. به‌منظور ارزیابی جامع عملکرد و مقیاس‌پذیری الگوریتم دقیق پیشنهادی (IEA) در مقایسه با مدل ریاضی حل‌شده توسط نرم‌افزار GAMS با حل‌کننده CPLEX، طراحی آزمایش‌ها بر اساس تولید نمونه‌های تصادفی در ابعاد گوناگون صورت گرفته است.

جدول ۲. مقادیر پارامترها برای تولید نمودهای تصادفی برای مسئله CLSP1DP

Table 2. Parameter values for generating random instances of the CLSP1DP problem

پارامتر	مقادیر
ظرفیت	۱۴۴
تقاضا	U[۱۰ , ۱۴۴]
هزینه ثابت سفارش‌دهی	U[۵۰۰ , ۱۰۰۰]
هزینه نگهداری	U[۲ , ۴]
هزینه خرید بدون تخفیف واحد کالا	U[۳۰۰ , ۵۰۰]
عمر کالا	U[۲ , ۵]
نرخ تخفیف	۰/۱
نرخ کاهش قیمت در فروش مجدد	۰/۲

جدول ۳. کلاس‌های مسئله

Table 3. Problem classes

کلاس	C/D
C1	۱/۲
C2	۱/۴۴
C3	۲
C4	۲/۲۵

جدول ۴. متوسط زمان حل IEA (به ثانیه)

Table 4. Average solution time of IEA (in seconds)

T	C1	C2	C3	C4
۱۰	۰/۰۱	۰	۰	۰
۳۰	۰/۱۴	۰/۱۱	۰/۱۰	۰/۱۰
۵۰	۰/۲۳	۰/۲۰	۰/۱۷	۰/۱۴
۷۰	۰/۳۸	۰/۳۶	۰/۲۱	۰/۱۹
۹۰	۰/۴۷	۰/۴۲	۰/۲۵	۰/۲۲
۱۱۰	۰/۵۶	۰/۴۷	۰/۲۷	۰/۳۰
۱۳۰	۰/۸۲	۰/۷۷	۰/۴	۰/۴۳
۱۵۰	۱/۱۵	۱/۱۰	۰/۵۵	۰/۵۴
۱۷۰	۱/۴۵	۱/۵۲	۰/۶۹	۰/۷۳
۱۹۰	۳/۰۳	۲/۷۴	۱/۴۴	۱/۴۷
۲۱۰	۳/۴۸	۳/۴۵	۲/۰۰	۱/۷۵
۲۳۰	۴/۸۹	۴/۶۲	۲/۸۸	۲/۷۹
۲۵۰	۶/۳۰	۵/۳۶	۳/۰۰	۳/۲۰
۲۷۰	۵/۸۶	۵/۷۵	۳/۴۸	۳/۱۶
۲۹۰	۷/۱۷	۶/۲۸	۳/۶۱	۳/۳۳
۳۱۰	۶/۸۷	۶/۵۹	۳/۸۹	۳/۶۳
۳۳۰	۸/۰۹	۷/۷۵	۴/۲۹	۴/۱۹

برای هر کلاس-دوره، ۲۰ نمود تصادفی تولید شده است. میانگین زمان حل الگوریتم IEA در **جدول ۴** آورده شده است. همچنین، **جدول ۵** نشان‌دهنده نتایج حل مدل ریاضی مسئله توسط حل کننده CPLEX است. در جدول مذکور، ستون‌های min، max، Avg و GAP، به ترتیب، نشان‌دهنده مینیمم، ماکزیمم و میانگین زمان حل CPLEX و همچنین، میانگین درصد خطای بهترین جواب موجه به دست آمده توسط CPLEX در حداکثر ۱۰۰۰ ثانیه، نسبت به جواب بهینه به دست آمده توسط IEA است که توسط رابطه (۲۱) به دست می‌آید.

$$\mathrm{GAP} = \frac{Z_{CPLEX} - Z_{IEA}}{Z_{IEA}} \times 100 \qquad (۲۱)$$

که در رابطه فوق، Z_{CPLEX} و Z_{IEA}، به ترتیب، نشان‌دهنده مقدار تابع هدف به دست آمده توسط CPLEX در حداکثر ۱۰۰۰ ثانیه و مقدار بهینه تابع هدف به دست آمده توسط الگوریتم IEA است. همچنین، در **جدول ۵**، ستون N نشان‌دهنده تعداد نمودهایی است که CPLEX در حداکثر ۱۰۰۰ ثانیه به جواب بهینه آن‌ها نرسیده است. CPLEX قادر بود برای تمامی نمودها در حداکثر ۱۰۰۰ ثانیه، به جواب شدنی برسد. از آنجا که برای $T > 170$ میانگین خطای CPLEX از ۴٪ تجاوز کرد، تنها نتایج مربوط به $T = 10$ تا $T = 170$ در **جدول ۵** گزارش شده است.

جدول ۵. نتایج مربوط به حل‌کننده CPLEX

Table 5.

T	کلاس	min	max	Avg	GAP	N
۱۰	C1	۰/۱۹	۰/۷۲	۰/۲۳	۰	۰
	C2	۰/۱۱	۰/۶۸	۰/۲۵	۰	۰
	C3	۰/۱۲	۰/۷۱	۰/۲۳	۰	۰
	C4	۰/۱۳	۰/۸۱	۰/۲۳	۰	۰
۳۰	C1	۰/۹	۳/۰۴	۱/۷۸	۰	۰
	C2	۱/۰	۳/۵۴	۱/۲۱	۰	۰
	C3	۰/۸	۳/۱۰	۱/۲۲	۰	۰
	C4	۰/۷۷	۲/۰۲	۱/۰	۰	۰
۵۰	C1	۶/۸	۹/۲۶	۸/۰۵	۰	۰
	C2	۶/۰۱	۷/۹۶	۶/۹۶	۰	۰
	C3	۶/۵۴	۸/۴۵	۷/۱۷	۰	۰
	C4	۵/۸۸	۸/۱۶	۷/۰۲	۰	۰
۷۰	C1	۱۲/۴	۷۰/۲	۳۳/۸	۰	۰
	C2	۱۳/۲	۴۲/۴	۲۰/۴	۰	۰
	C3	۱۰/۷	۳۸/۱	۲۵/۴	۰	۰
	C4	۱۶/۸	۴۹/۲۴	۳۵/۱	۰	۰
۹۰	C1	۶۰/۴	۹۰/۴	۷۱/۴	۰	۰
	C2	۶۵/۸	۱۰۰/۴	۸۳/۱	۰	۰
	C3	۶۸/۲	۹۹/۶	۷۹/۳	۰	۰
	C4	۵۴/۰	۷۵/۳	۶۵/۵	۰	۰
۱۱۰	C1	۱۳۰/۸	۲۰۰/۱	۱۷۵/۵	۰	۰
	C2	۱۴۲/۴	۲۰۷/۶	۱۸۲/۳	۰	۰
	C3	۱۳۵/۹	۱۹۰/۳	۱۷۰/۱	۰	۰
	C4	۱۵۹/۴۳	۲۱۰/۸	۱۸۰/۲	۰	۰
۱۳۰	C1	۲۶۰/۴	۳۷۰/۱	۳۱۱/۳	۰	۰
	C2	۲۴۰/۶	۳۶۹/۴	۳۰۰/۴	۰	۰
	C3	۲۶۱/۲	۳۸۸/۶	۳۳۴/۶	۰	۰
	C4	۲۶۲/۵	۳۳۰/۳	۲۹۰/۹	۰	۰
۱۵۰	C1	۴۲۶/۳	۸۸۰/۹	۶۳۴/۲	۰	۰
	C2	۴۱۲/۳	۱۰۰۰	۷۵۵/۳	۰/۵	۲
	C3	۴۸۵/۱	۸۹۲/۰	۶۴۰/۹	۰	۰
	C4	۵۰۱/۸	۹۰۱/۴	۷۱۷/۶	۰	۰
۱۷۰	C1	۷۹۲/۱	۱۰۰۰	۹۳۳/۷	۲/۲۳	۴
	C2	۶۹۹/۶	۱۰۰۰	۸۴۸/۳	۱/۹۲	۳
	C3	۸۲۵/۵	۱۰۰۰	۹۳۶/۶	۲/۷۸	۴
	C4	۸۳۴/۵	۱۰۰۰	۹۵۲/۳	۳/۰۶	۵

از **جدول ۴** و **جدول ۵** مشخص است که الگوریتم IEA برتری قابل توجهی به حل کننده CLPEX در حل نمودهای مسئله تحت بررسی دارد و توانسته نمودهای با ابعاد بالا را در زمان قابل قبول و به صورت دقیق حل کند به نحوی که IEA نمودهای با ۱۳۰ دوره و کمتر را در کمتر از ۱ ثانیه حل کرده است و برای نمودهای با ۳۳۰ دوره، در حداکثر ۸ ثانیه قادر به یافتن جواب دقیق بوده است.

در حالی که CPLEX در تمام نمودهای با ۵۰ دوره به بعد، بیش از ۵ ثانیه زمان، صرف حل کرده است و زمان حل آن با افزایش تعداد دوره‌ها به صورت قابل توجهی افزایش یافته. به طوری که در نمودهای با ۱۷۰ دوره حدودا به ۱۰۰۰ ثانیه رسیده است. مشاهده می‌شود که در نمودهای با ۱۷۰ دوره، CPLEX در کلاس‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، به ترتیب، از حل دقیق ۴، ۳، ۴ و ۵ نمود، در ۱۰۰۰ ثانیه عاجز بود. همچنین، همانگونه که مشخص است، با وجودی که نسبت C/D تاثیری در زمان حل CLPEX ندارد، بر زمان حل الگوریتم IEA تاثیرگذار است. همان‌طور که از جدول مذکور مشخص است، با افزایش این نسبت، زمان حل الگوریتم IEA کاهش پیدا می‌کند؛ که این کاهش برآمده از ساختار الگوریتم است. در **الگوریتم ۲** که هزینه‌های مربوط به بخش‌های A را محاسبه می‌کند، با افزایش نسبت C/D، این احتمال بیشتر می‌شود که برای دوره‌های i و j مفروض، سطح موجودی انتهای $W_1^{i,j}$ بعلاوه یک سفارش به اندازه D در دوره $j+1$ نتواند تقاضای دوره $j+1$ را تامین کند و در نتیجه ساخت ψ_i مجموعه مرتب به انتها رسیده و الگوریتم ۲ متوقف شود. همچنین، در حالتی که $C/D \geq 2$ باشد، تعدادی از گام‌های الگوریتم ۲ حذف می‌شود که این دلیل، بیان‌گر اختلاف قابل توجه بین میانگین زمان اجرای در کلاس‌های ۱-۲ با کلاس‌های ۳-۴ است.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، ما یک مسئله تعیین اندازه دسته تک کلایی ظرفیت‌دار برای اقلام فسادپذیر را با در نظرگیری تخفیف کلی تک‌نقطه‌ای و امکان فروش مجدد موردبررسی قرار دادیم. ابتدا مدل ریاضی مسئله ارائه شد و در ادامه شرط ZIO برای مسئله تعمیم داده شد و سپس چند ویژگی بهینگی مفید برای بازه‌های بازتولید در جواب بهینه، ارائه و اثبات شد. سپس، بر مبنای ویژگی‌های مذکور، یک الگوریتم شمارش ضمنی برای مسئله تحت بررسی ارائه شد که می‌تواند در زمان $O(T^4)$ به‌صورت دقیق مسئله را حل کند. نتایج محاسباتی نشان داد که الگوریتم ارائه‌شده در حل دقیق نمودهای مسئله بسیار کاراتر و برتر از حل‌کننده CPLEX است.

پژوهش‌های آینده می‌توانند در چند محور توسعه یابند؛ ازجمله در نظر گرفتن تخفیف‌های چندنقطه‌ای یا نموی، فرض عدم قطعیت در تقاضا با استفاده از رویکردهای بهینه‌سازی استوار، و همچنین تعمیم مدل به شبکه‌های زنجیره تأمین چندمرحله‌ای برای کالاهای فسادپذیر.

قدردانی

ندارد.

حمایت مالی

این پژوهش هیچ‌گونه حمایت مالی دریافت نکرده است.

تعارض منافع

نویسنده اعلام می‌کند که هیچ‌گونه تعارض منافع مرتبط با پژوهش حاضر ندارد.

مشارکت‌های نویسندگان

یاسر ملکیان: مفهوم‌پردازی، روش‌شناسی، نگارش پیش‌نویس اصلی، نرم‌افزار، اعتبارسنجی، تحقیق و بررسی؛ **سیدحمید میرمحمدی:** راهنمایی، مدیریت پروژه، روش‌شناسی، تحقیق و بررسی، اعتبارسنجی، نگارش پیش‌نویس اصلی؛ **محمدعلی اقبالی:** مدیریت داده‌ها، تحلیل آماری، تحقیق و بررسی، روش‌شناسی، تأمین منابع، اعتبارسنجی، مصورسازی، نگارش - بازبینی و ویرایش.

دسترسی به داده‌ها

داده‌های نمودهای تولید شده این مطالعه، در صورت درخواست موجه، از طریق نویسنده مسئول قابل دریافت هستند.

مراجع

Aksen, D., Altınkemer, K., & Chand, S. (2003). The single-item lot-sizing problem with immediate lost sales. *European Journal of Operational Research, 147*(3), 558–566. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(02)00331-4

Chan, L. M. A., Muriel, A., Shen, Z.-J., & Simchi-Levi, D. (2002). On the effectiveness of zero-inventory-ordering policies for the economic lot-sizing model with a class of piecewise linear cost structures. *Operations Research, 50*(6), 1058–1067. https://doi.org/10.1287/opre.50.6.1058.350

Chu, L. Y., Hsu, V. N., & Shen, Z.-J. M. (2005). An economic lot-sizing problem with perishable inventory and economies of scale costs: Approximation solutions and worst case analysis. *Naval Research Logistics, 52*(6), 536–548. https://doi.org/10.1002/nav.20096

Chubanov, S., Kovalyov, M. Y., & Pesch, E. (2006). An FPTAS for a single-item capacitated economic lot-sizing problem with monotone cost structure. *Mathematical Programming, 106*(3), 453–466. https://doi.org/10.1007/s10107-005-0641-0

Chung, C.-S., & Lin, C.-H. M. (1988). An $O(T^2)$ algorithm for the NI/G/NI/ND capacitated lot size problem. *Management Science, 34*(3), 420–426. https://doi.org/10.1287/mnsc.34.3.420

Chung, C.-S., Chiang, D. T., & Lu, C.-Y. (1987). An optimal algorithm for the quantity discount problem. *Journal of Operations Management, 7*(1–2), 165–177. https://doi.org/10.1016/0272-6963(87)90015-5

Emadi, S. H., Sadeghian, A., Rabbani, M., & Dehghan Dehnavi, H. (2024). Application of optimal control approach in the optimization of production inventory systems in supply chain. *System Engineering and Productivity*, *4*(1), 85-98. https://doi.org/10.22034/msb.2024.2026595.1203

Fan, J., Ou, J., & Hsu, V. N. (2026). Dynamic lot sizing with multiple age-differentiated demands of a perishable product. *Naval Research Logistics, 73*(7), 1173–1187. https://doi.org/10.1002/nav.70081

Federgruen, A., & Lee, C.-Y. (1990). The dynamic lot size model with quantity discount. *Naval Research Logistics, 37*(5), 707–713. https://doi.org/10.1002/1520-6750(199010)37:5%3C707::AID-NAV3220370509%3E3.0.CO;2-5

Florian, M., & Klein, M. (1971). Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints. *Management Science, 18*(1), 12–20. https://doi.org/10.1287/mnsc.18.1.12

Florian, M., Lenstra, J. K., & Rinnooy Kan, A. H. G. (1980). Deterministic production planning: Algorithms and complexity. *Management Science, 26*(7), 669–679. https://doi.org/10.1287/mnsc.26.7.669

Friedman, Y., & Hoch, Y. (1978). A dynamic lot-size model with inventory deterioration. *INFOR: Information Systems and Operational Research, 16*(2), 183–188. https://doi.org/10.1080/03155986.1978.11731700

Grubbström, R. W. (2014). Dynamic lotsizing with a finite production rate. *International Journal of Production Economics, 149*, 68–79. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2012.12.009

Hellion, B., Mangione, F., & Penz, B. (2012). A polynomial time algorithm to solve the single-item capacitated lot sizing problem with minimum order quantities and concave costs. *European Journal of Operational Research, 222*(1), 10–16. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.04.024

Hellion, B., Mangione, F., & Penz, B. (2014). A polynomial time algorithm for the single-item lot sizing problem with capacities, minimum order quantities and dynamic time windows. *Operations Research Letters, 42*(8), 500–504. https://doi.org/10.1016/j.orl.2014.08.010

Hsu, V. N. (2000). Dynamic economic lot size model with perishable inventory. *Management Science, 46*(8), 1159–1169. https://doi.org/10.1287/mnsc.46.8.1159.12021

Hwang, H.-C. (2010). A dynamic lot-sizing problem with backlogging for minimum replenishment policy. *Journal of Korean Institute of Industrial Engineers, 36*(1), 7–12.

Koca, E., Yaman, H., & Aktürk, M. S. (2014). Lot sizing with piecewise concave production costs. *INFORMS Journal on Computing, 26*(4), 767–779. https://doi.org/10.1287/ijoc.2014.0597

Kovalyov, M. Y., & Pesch, E. (2014). An O(n log n) algorithm for a single-item capacitated lot-sizing problem with linear costs and no backlogging. *International Journal of Production Research, 52*(13), 3758–3761. https://doi.org/10.1080/00207543.2013.857058

Lee, C.-Y., & Li, X. (2013). Economic lot sizing: The capacity reservation model. *Operations Research Letters, 41*(6), 670–674. https://doi.org/10.1016/j.orl.2013.09.010

Journal of Operational Research, 244(3), 881–891. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.02.021

Ou, J. (2012). Economic lot sizing with constant capacities and concave inventory costs. *Naval Research Logistics, 59*(7), 497–501. https://doi.org/10.1002/nav.21504

Ou, J. (2017a). A polynomial time algorithm to the economic lot sizing problem with constant capacity and piecewise linear concave costs. *Operations Research Letters, 45*(5), 493–497. https://doi.org/10.1016/j.orl.2017.07.010

Ou, J. (2017b). Improved exact algorithms to economic lot-sizing with piecewise linear production costs. *European Journal of Operational Research, 256*(3), 777–784. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.06.040

Papadopoulos, K. (2025). An O(n log n) algorithm for single-item lot sizing with a one-breakpoint all-units discount and non-increasing prices [Preprint]. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2510.11368

Papadopoulos, K. (2026). A novel exact algorithm for economic lot-sizing with piecewise linear production costs. *Journal of Global Optimization, 96*(1), 171–205. https://doi.org/10.1007/s10898-026-01636-3

Phouratsamay, S.-L., & Cheng, T. C. E. (2019). The single-item lot-sizing problem with two production modes, inventory bounds, and periodic carbon emissions capacity. *Operations Research Letters, 47*(5), 339–343. https://doi.org/10.1016/j.orl.2019.06.003

Piñeyro, P., Viera, O., & Cancela, H. (2013). An $O(T^3)$ algorithm for the capacitated economic lot-sizing problem with stationary capacities and concave cost functions with non-speculative motives. *Lecture Notes in Management Science, 5*, 39–45.

Sargut, F. Z., & Işık, G. (2017). Dynamic economic lot size model with perishable inventory and capacity constraints. *Applied Mathematical Modelling, 48*, 806–820. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.02.024

Sebatjane, M., & Adetunji, O. (2021). Optimal lot-sizing and shipment decisions in a three-echelon supply chain for growing items with inventory level- and expiration date-dependent demand. *Applied Mathematical Modelling, 90*, 1204–1225. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.10.021

Sohn, K.-I., & Hwang, H. (1987). A dynamic quantity discount lot size model with resales. *European Journal of Operational Research, 28*(3), 293–297. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(87)80171-6

Li, C.-L., Ou, J., & Hsu, V. N. (2012). Dynamic lot sizing with all-units discount and resales. *Naval Research Logistics, 59*(3–4), 230–243. https://doi.org/10.1002/nav.21484

Liu, X., Chu, F., Chu, C., & Wang, C. (2007). Lot sizing with bounded inventory and lost sales. *International Journal of Production Research, 45*(24), 5881–5894. https://doi.org/10.1080/00207540600891408

Malekian, Y., Mirmohammadi, S. H., & Bijari, M. (2021). Polynomial-time algorithms to solve the single-item capacitated lot sizing problem with a 1-breakpoint all-units quantity discount. *Computers & Operations Research, 134*, Article 105373. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105373

Kolbadinejad, S. M, & Bagherinejad, J. (2023). Presenting a dual-objective location-inventory model for designing an integrated forward/reverse logistics network. *System Engineering and Productivity*, *3*(1), 1-40. https://doi.org/10.22034/sep.2023.706141

Manesh-Bozorgi, M., Abtahi, A. R., & Haghighi-Rad, F. (2026). Recovery dynamics of pharmaceutical inventory policies under temporary demand shocks: an agent-based simulation study. *System Engineering and Productivity*, https://doi.org/10.22034/sep.2026.2095646.1533

Mirmohammadi, S. H., & Eshghi, K. (2012). A hybrid polynomial-time algorithm for the dynamic quantity discount lot size model with resale. *Computers & Operations Research, 39*(7), 1771–1778. https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.10.018

Mirmohammadi, S. H., Shadrokh, S., & Kianfar, F. (2009). An efficient optimal algorithm for the quantity discount problem in material requirement planning. *Computers & Operations Research, 36*(6), 1780–1788. https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.05.003

Moshiri, S., & Rashidi Komijan, A. (2023). Integrated supply-production-distribution model with the aim of profit maximization (Case study: Zimaband Ariafer Factory). *System Engineering and Productivity*, *3*(1), 157-184. https://doi.org/10.22034/sep.2023.706146

Okhrin, I., & Richter, K. (2011). The linear dynamic lot size problem with minimum order quantity. *International Journal of Production Economics, 133*(2), 688–693. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2011.05.017

Önal, M., Romeijn, H. E., Sapra, A., & van den Heuvel, W. (2015). The economic lot-sizing problem with perishable items and consumption order preference. *European*

Validoust, M., Mostofi, T. M., Mousavi, M. V., & Babaei, H. (2026). Predicting the response of an engineering system by developing a data-driven surrogate model based on artificial neural networks as an alternative to finite element analysis. *System Engineering and Productivity*, *6*(3), 303-341. https://doi.org/10.22034/sep.2026.2082317.1452

van Hoesel, C. P. M., & Wagelmans, A. P. M. (1996). An O(T³) algorithm for the economic lot-sizing problem with constant capacities. *Management Science, 42*(1), 142–150. https://doi.org/10.1287/mnsc.42.1.142

Veisi, O. (2026). An Integrated optimization of spare parts inventory using machine-learning–based demand forecasting, taking into account safety stock and dual lead-time supply. *System Engineering and Productivity*, *6*(3), 225-262. https://doi.org/10.22034/sep.2026.2074035.1409

Wagner, H. M., & Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science, 5*(1), 89–96. https://doi.org/10.1287/mnsc.5.1.89

Yu, Y., Hong, Z., Chu, C., & Liang, L. (2013). A dynamic lot sizing model with carbon emission constraint and multi-mode production: A general property and a polynomially solvable case. In *2013 10th IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control (ICNSC)* (pp. 413–417). IEEE. https://doi.org/10.1109/ICNSC.2013.6548774

Zangwill, W. I. (1966). A deterministic multi-period production scheduling model with backlogging. *Management Science, 13*(1), 105–119. https://doi.org/10.1287/mnsc.13.1.105

Zangwill, W. I. (1969). A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot size production system—A network approach. *Management Science, 15*(9), 506–527. https://doi.org/10.1287/mnsc.15.9.506

Zhang, M. (2015). Capacitated lot-sizing problem with outsourcing. *Operations Research Letters, 43*(5), 479–483. https://doi.org/10.1016/j.orl.2015.06.007